

*Modèles  
d'analyse  
de variance  
avec*

*STATISTICA*

**Bernard Clément, PhD**

**Génistat Conseils inc, 2005**

**TABLE DES MATIÈRES**

§ 1. Concepts de base et ANOVA .....	3
§ 2. L'approche processus et l'analyse statistique.....	8
§ 3. <i>STATISTICA</i> .....	12
§ 4. Modèles linéaires statistiques .....	15
§ 5. ANOVA avec un facteur .....	20
§ 6. Analyse des moyennes et comparaisons multiples .....	29
§ 7. Diagnostics et mesures correctives .....	37
§ 8. ANOVA avec deux facteurs .....	50
§ 9. Analyse de covariance .....	65
§ 10. ANOVA avec trois facteurs .....	74
§ 11. Modélisation avec quatre facteurs et plus .....	85
§ 12. Mesures répétées – plan en parcelles divisées .....	89
§ 13. Facteurs emboîtés .....	117
§ 14. Autres structures .....	123
§ Références .....	124
§ Fichiers de données .....	125
§ Exercices .....	126

# 1. CONCEPTS DE BASE DE L'ANOVA

Le but de l'analyse de la variance est de tester la présence de différences significatives ou non entre des moyennes. Le cas classique le plus simple est celui de la comparaison de deux moyennes provenant d'échantillons indépendants. Le test t de Student est la procédure statistique appropriée pour traiter de ce cas. Si on a plus de deux échantillons indépendants, il faut une autre méthode pour tester simultanément l'égalité ou non de toutes les moyennes. L'analyse de la variance est la méthode employée pour tester plusieurs moyennes. Au cœur de cette méthode est la décomposition de la variabilité totale selon les différentes sources présentes dans les données. La variabilité totale est partitionnée (décomposée) en deux sources : la variabilité intra due à l'erreur expérimentale et la variabilité inter due aux écarts de moyennes entre les différentes modalités d'un facteur. Cette idée se généralise à des études statistiques avec plusieurs facteurs intervenant dans des designs (plans) expérimentaux complexes.

**Exemple 1:** cas de 2 groupes avec un seul facteur

id	groupe	y-réponse
1	a	1
2	a	2
3	a	3
4	b	5
5	b	6
6	b	7

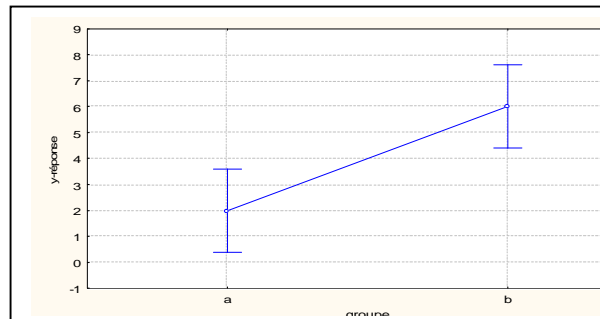
	groupe a	groupe b
moyenne	2	6
somme de carrés (SS)	2	2
moyenne globale	4	
somme totale de carrés	28	

L'aboutissement d'une analyse de la variance (ANOVA) prend toujours la forme d'un tableau dont les éléments sont :

- § l'identification des sources de variabilité ;
- § le calcul des sommes de carrés (SS) ;
- § le calcul des degrés de liberté (df) ;
- § le calcul des carrés moyens (MS) ;
- § le calcul des ratio  $F = MS(\text{effet}) / MS(\text{erreur})$  ;
- § l'évaluation de la probabilité p du dépassement du ratio F.

	SS	df	MS	F	p
intercept	96	1	96	96	0.0006
groupe	24	1	24	24	0.0080
erreur	4	4	1		

les groupes sont différents car p est « petit »



### Test de signification

Sous l'hypothèse nulle (pas de différence entre les deux populations), la variance estimée avec la variabilité à l'intérieur de chaque groupe (intra) devrait être à peu près la même que la variance entre les groupes (inter). On peut comparer ces variances à l'aide d'un test F (distribution de Fisher) basé sur le ratio des deux variances moyennes (MS). Lorsque le ratio est assez grand, on conclut que les moyennes des populations sont significativement différentes l'une de l'autre.

### Variables dépendantes (réponses) et facteurs (variables indépendantes)

Les variables mesurées sont appelées les *variables dépendantes* (réponses, variable d'intérêt). Les variables qui sont manipulées ou contrôlées (fixées ou mesurées) sont appelées les *variables indépendantes* (ou facteurs).

### Plusieurs facteurs

En général, les expériences ont typiquement plusieurs facteurs. La méthode d'analyse ANOVA est capable de tenir en compte plusieurs facteurs ainsi que des structures complexes qui peuvent être présentes dans les données.

**Exemple 2** : Supposons que l'on tient en compte un deuxième facteur, sexe de l'individu.

id	groupe	sexe	y-réponse
1	a	hom	1
2	a	hom	2
3	a	hom	3
4	b	hom	5
5	b	hom	6
6	b	hom	7
7	a	fem	3
8	a	fem	4
9	a	fem	5
10	b	fem	7
11	b	fem	8
12	b	fem	9

moyenne	groupe a	groupe b
hommes	2	6
femmes	4	8
tous	3	7

On peut partitionner la variabilité selon 3 sources :

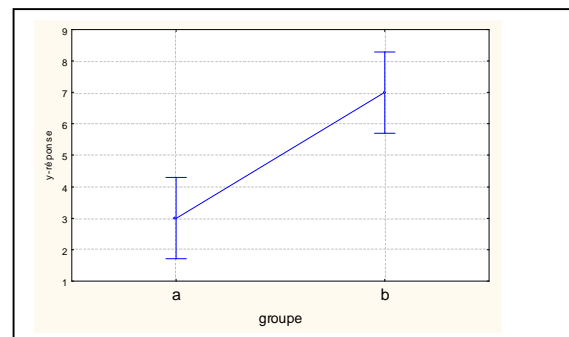
- (1) variabilité due au facteur groupe experimental
- (2) variabilité due au facteur sexe
- (3) erreur inexplicée (intra variabilité)

note: il y a une source additionnelle - *interaction* – qui sera présentée après.

Si on n'inclut pas le facteur sexe dans l'analyse, on obtient le tableau d'analyse de la variance suivant..

ANOVA					
	SS	df	MS	F	p
Intercept	300	1	300	150	0.0000
groupe	48	1	48	24	0.0006
erreur	20	10	2		

les groupes sont différents mais une partie de cette différence est due au facteur sexe.



L'analyse ANOVA est une méthode puissante car elle permet de :

- § tester **chaque facteur** en contrôlant tous les autres ;
- § tester des **hypothèses complexes** faisant intervenir les effets d'interaction entre les facteurs ;
- § augmenter la **sensitivité** (puissance) des tests de signification.

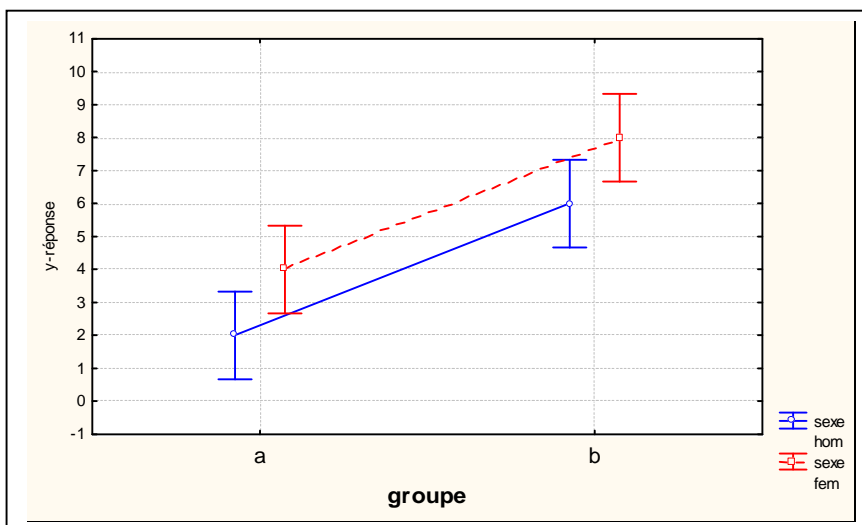
Les variables qui ne sont pas tenus en compte, augmente la somme de carrés SS de l'erreur résiduelle (expérimentale) et les degrés de liberté (df) associés. Ainsi, le carré moyen de l'erreur (résiduelle) MS peut augmenter et, avoir comme conséquence, de masquer l'effet des autres facteurs.

**Effets principaux et effets d'interaction**

Une analyse correcte pour comparer les 2 groupes devra tenir en compte l'influence du facteur sexe. Il y a deux modèles que l'on peut proposer. Un **premier modèle général** (complet) qui incorpore des effets principaux des facteurs et en plus un effet d'interaction entre les deux facteurs. Un **deuxième modèle simple** incorpore des effets principaux seulement. On recommande de considérer un modèle général complet avec des effets d'interaction comme la première modélisation pour interpréter des données. À la suite de cette première analyse on peut enlever des effets principaux et des effets d'interaction qui ne sont pas significatifs en vue d'avoir un modèle parcimonieux. On recommande de conserver dans le modèle final des effets principaux non significatifs si des effets d'interaction significatifs impliquent ces facteurs. C'est le **principe de hiérarchie**.

**Analyse 1 : modèle complet  $y = \text{général} + \text{groupe} + \text{sexe} + \text{groupe}*\text{sexe}$**

ANOVA					
	df	SS	MS	F	p
<b>Intercept</b>	<b>1</b>	<b>300</b>	<b>300</b>	<b>300</b>	<b>0.0000</b>
<b>groupe</b>	<b>1</b>	<b>48</b>	<b>48</b>	<b>48</b>	<b>0.0001</b>
<b>sexe</b>	<b>1</b>	<b>12</b>	<b>12</b>	<b>12</b>	<b>0.0085</b>
<b>groupe*sexe</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1.0000</b>
<b>erreur</b>	<b>8</b>	<b>8</b>	<b>1</b>		
<b>total</b>	<b>11</b>	<b>68</b>			



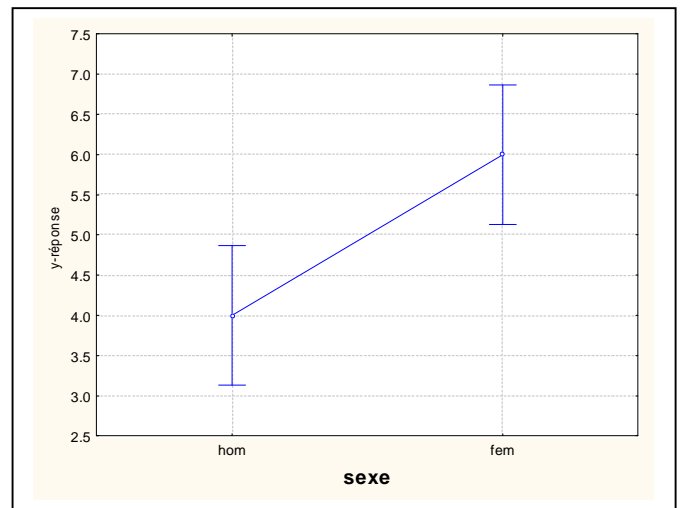
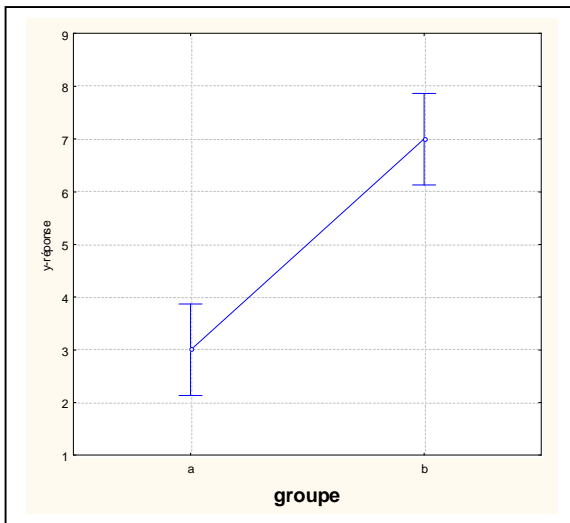
**graphique de visualisation des données**

**graphique de l'interaction entre les 2 facteurs**

**parrallélisme = absence d'intraction**

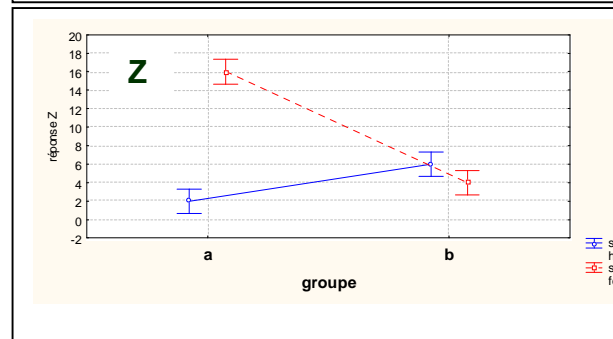
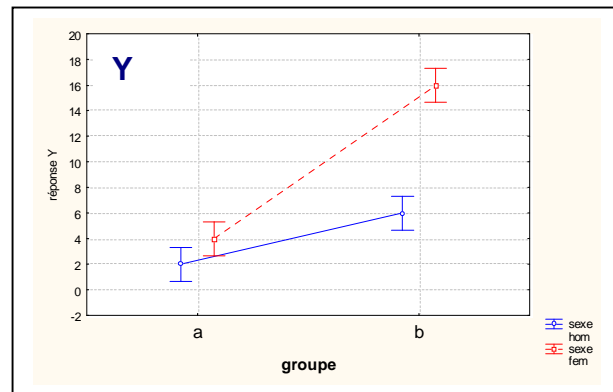
Analyse 2 ; modèle simplifié  $y = \text{général} + \text{groupe} + \text{sexe}$

ANOVA					
	SS	df	MS	F	p
Intercept	300	1	300	337.5	0.000000
groupe	48	1	48	54.0	0.000043
sexe	12	1	12	13.5	0.005121
erreur	8	9	0.89		



Exemple 3 : présence d'interaction

données				
id	groupe	sexe	réponse Y	réponse Z
1	a	hom	1	1
2	a	hom	2	2
3	a	hom	3	3
4	b	hom	5	5
5	b	hom	6	6
6	b	hom	7	7
7	a	fem	3	15
8	a	fem	4	17
9	a	fem	5	16
10	b	fem	15	3
11	b	fem	17	4
12	b	fem	16	5



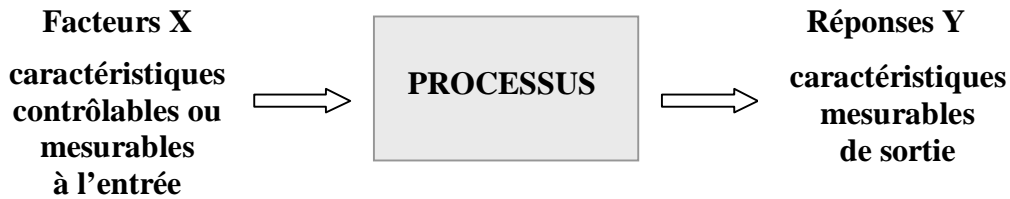
ANOVA							
	df	réponse Y SS	réponse Y MS	réponse Y F	réponse Z SS	réponse Z MS	réponse Z F
Intercept	1	588	588	588	588	588	588
groupe	1	192	192	192	48	48	48
sexe	1	108	108	108	108	108	108
groupe*sexe	1	48	48	48	192	192	192
Erreur	8	8	1		8	1	
Total	11	356			356		

### Interprétation des effets d'interactions d'ordre deux et plus

On peut dire qu'un **effet d'interaction d'ordre deux** entre deux facteurs a pour conséquence de modifier l'effet principal d'un des deux facteurs selon la valeur prise par le deuxième facteur. En général, un effet d'interaction d'ordre 3 entre trois facteurs a pour conséquence de modifier l'effet d'interaction entre de 2 des 3 facteurs selon la valeur prise par le troisième facteur. Dans le cas où les facteurs sont quantitatifs (modèles de régression), les effets d'interaction sont les coefficients des termes d'ordre 2 et plus du modèle polynomial. Ils sont plus faciles à interpréter que dans le cas où les facteurs sont qualitatifs (modèles d'analyse de variance).

## 2. L'APPROCHE PROCESSUS et L'ANALYSE STATISTIQUE

La figure 1 représente un processus et l'approche statistique pour son étude :



**Figure 1 : l'approche processus et l'analyse statistique**

La problématique est de dégager des relations et des équations entre les paramètres d'entrée (facteurs X) et les variables de réponse Y :

$$Y = F(X)$$

On admet a priori que ces relations ne peuvent être parfaites. Les variables facteurs X disponibles seront responsables de l'explication d'une partie seulement de la variabilité des variables de réponse Y.

Nous ne sommes pas dans un monde idéal avec des relations entrées (X)-sorties(Y) complètement prévisibles et connues. Cela s'explique par deux raisons fondamentales. D'une part, le système à l'étude n'est pas déterminé uniquement par les variables mesurées. Il y a toujours des variables inconnues et, par conséquent non mesurées, qui ne sont pas disponibles. D'autre part, la relation entrée-sortie F est inconnue, généralement complexe, et ne peut pas être complètement représentée l'aide d'une fonction relativement simple comme une fonction polynomiale.

Ces constatations constituent la règle plutôt que l'exception dans toutes les études statistiques. Mais au delà de ces contraintes, il y a un moyen d'affiner notre connaissance afin de dégager des résultats pratiques et exploitables pour l'étude des processus.

Il y a deux méthodes statistiques pour l'étude des relations entrées-sorties. *L'analyse de régression* et *l'analyse de la variance*. Il est utile de connaître les distinctions et les limites de chaque méthode afin de savoir reconnaître le contexte approprié de leur application.

En **l'analyse de régression**, la structure des données est généralement simple et, elle est généralement constituée, de données historiques et observationnelles sans que celles-ci soient sous un contrôle précis comme dans les expériences planifiées. *L'objectif principal est le développement d'une équation (modèle) reliant les réponses et les prédicteurs*. Les prédicteurs du modèle à développer sont quantitatifs et prennent quasiment autant de valeurs distinctes que le nombre d'observation dont on dispose. L'équation est exploitée pour construire des tableaux de prédiction dans l'espace des prédicteurs. De plus, en général, un objectif d'optimisation de la réponse est souvent rattaché à ces études : déterminer un ou plusieurs ensembles de valeurs des prédicteurs qui permettent d'optimiser (maximum, minimum, nominal) la réponse. L'emphase de l'analyse est mise sur la qualité de l'équation développée : l'analyse des résidus, l'identification des observations influentes, l'analyse de sensibilité, la recherche d'un modèle parcimonieux, etc.



En **analyse de variance**, les variables d'entrée sont des facteurs catégoriques (qualitatifs) ayant un nombre relativement restreint de valeurs ou modalités. La source des données provient d'études expérimentales planifiées. *L'objectif visé est d'identifier si les effets principaux de chaque facteur et les effets d'interaction impliquant plusieurs facteurs ont une influence réelle sur la réponse au-delà de la variabilité expérimentale.* La structure expérimentale est généralement le résultat d'un plan reflétant une certaine complexité. La difficulté principale est de proposer un modèle qui reflète correctement les subtilités du plan pour faire l'analyse de la variabilité du système. Le plan expérimental doit être décrit précisément : méthode d'assignation des traitements aux unités expérimentales, présence de contraintes, structure factorielle ou autre des traitements, participation possible des unités expérimentales à la collecte des données à plusieurs reprises, (mesures répétées dans le temps), etc. Le tableau résume les éléments distinctifs entre les deux méthodes d'analyse.

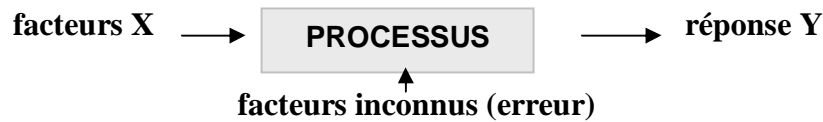
**Tableau** : comparaison des méthodes d'analyse

<b>Élément de comparaison</b>	<b>Analyse de régression</b>	<b>Analyse de variance</b>
<i>Source des données</i>	observationnelles ou historiques	résultat d'un plan d'expérimentation
<i>Nombre d'observations</i>	grand nombre : centaines, milliers ou plus	petit nombre : dizaines
<i>Variables d'entrée</i>	quantitatives	catégoriques
<i>Nombre de valeurs distinctes des variables d'entrée</i>	autant qu'il y a d'observations	nombre restreint généralement moins de 10
<i>Utilisation des variables indicatrices (0-1)</i>	occasionnelle	employées systématique pour représenter les modalités
<i>But</i>	développement d'un modèle prédictif de la réponse	identification des effets significatifs sur la réponse
<i>Emphase et difficulté</i>	forme et la qualité du modèle	spécification du modèle reflétant la complexité du plan expérimental
<i>Structure des données</i>	simple	complexe

Dans les applications, il arrive très souvent que nous soyons en présence de variables quantitatives et de variables catégoriques et que l'on s'interroge sur leur influence sur la variable de réponse. Dans ce dernier cas on utilise la méthode dite de **régression généralisée**. Cette méthode est aussi connue sous le nom d'**analyse de covariance** et elle combine l'analyse de régression et l'analyse de variance.

## Types d'analyse et les désigns expérimentaux

L'analyse de la variance (ANOVA) est une méthode pour analyser l'influence de **facteurs qualitatifs** sur une (ou plusieurs) variables de réponse. Si tous les *facteurs (variables) sont quantitatifs*, l'**analyse de régression** est la méthode recommandée pour analyser les données. Le but recherché de l'analyse de régression est de développer des équations de prédiction et optimiser la variable de réponse. Si on a un mélange de facteurs (variables) qualitatifs et quantitatifs, la méthode est connue sous le nom d'**analyse de covariance** ou de **régression généralisée**.



X : variables / facteurs	ANALYSE
quantitatifs / numériques	régression
qualitatifs / catégoriques	variance
quantitatifs et qualitatifs	covariance

La nature des variables X n'est pas le seul et unique élément à tenir en compte pour décider du type d'analyse statistique à employer avec un ensemble de données. Le tableau suivant définit les autres éléments à considérer.

élément	qualitatif	commentaire
type d'étude statistique	§ expérimentale (mode actif) § observationnelle (passif)	
contrôle des X	§ fixés (étudiés, principaux) § mesurés § bloqués (secondaires) § inconnus	<i>inconnus</i> : tout ce que l'on ne connaît pas ; s'appelle <i>l'erreur expérimentale</i> même si les données n'ont pas été générées par un plan expérimental structuré
nombre de X	§ 1 : simple (one way) § $\geq 2$ : multifacteurs (multi way)	
nature des X	§ fixes § aléatoires § hybrides (mixed)	<i>fixe</i> : modalités (valeurs) choisies délibérément <i>aléatoire</i> : échantillon de modalités extraites de manière aléatoire (aucun contrôle)
nombre de Y	§ 1 : ANOVA § $\geq 2$ : MANOVA	
design expérimental : (plan, devis)	§ aléatoire (sans restriction) § blocs § mesures répétées	<i>mesures répétées</i> : la variable de réponse est mesurée plusieurs fois sur la même unité statistique
assignation des traitements aux unités (sujets) expérimentales	§ fractionnaires / incomplet	
	§ emboîtés (nested)	
	§ parcelles divisées (split -plot)	
	§ permutation (crossover)	
	§ .....	

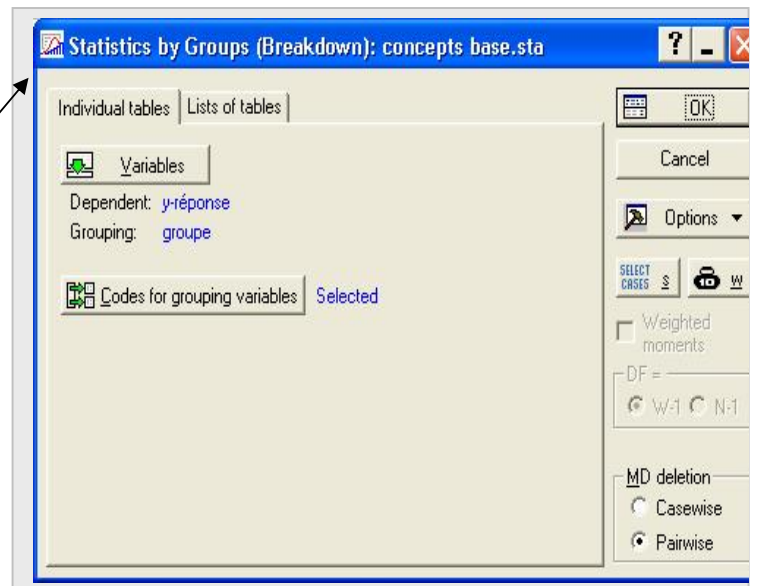
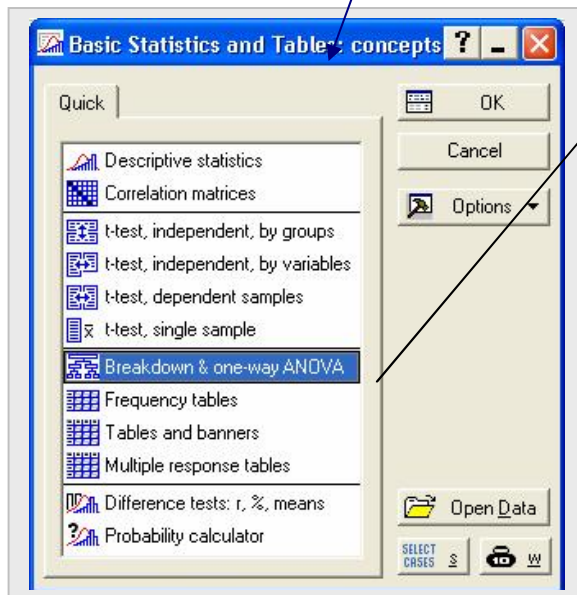
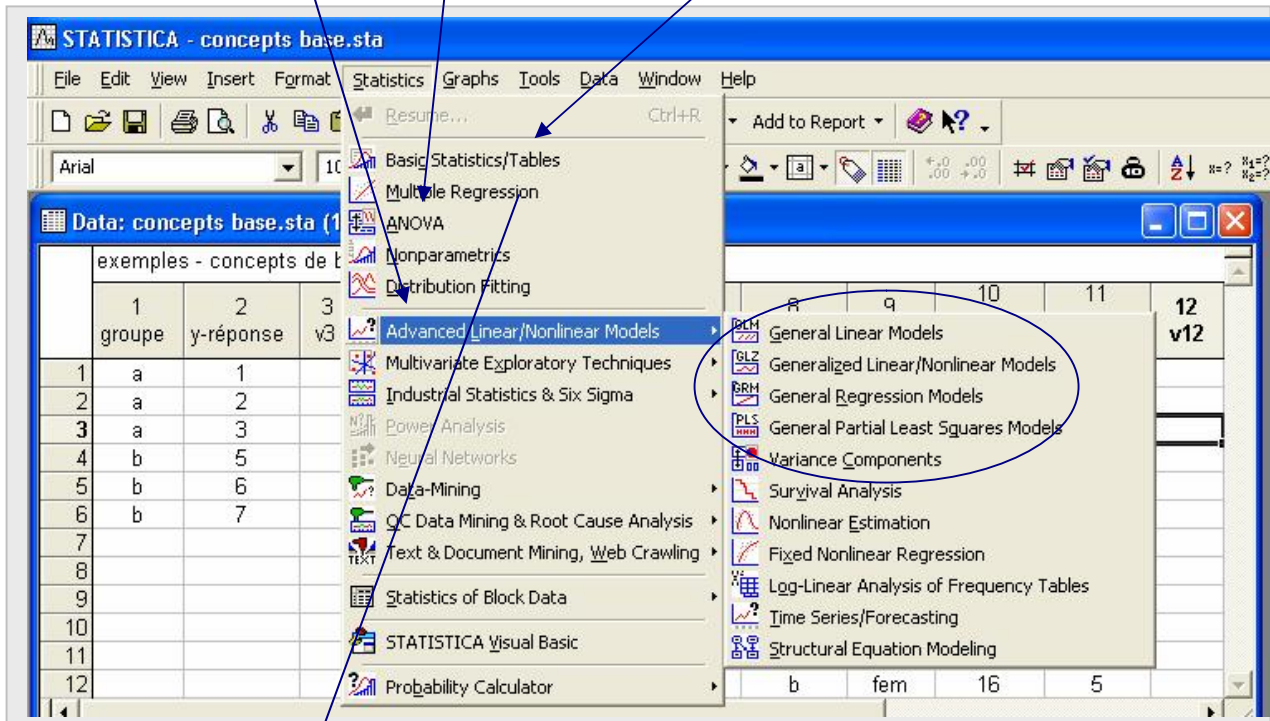
## Remarques

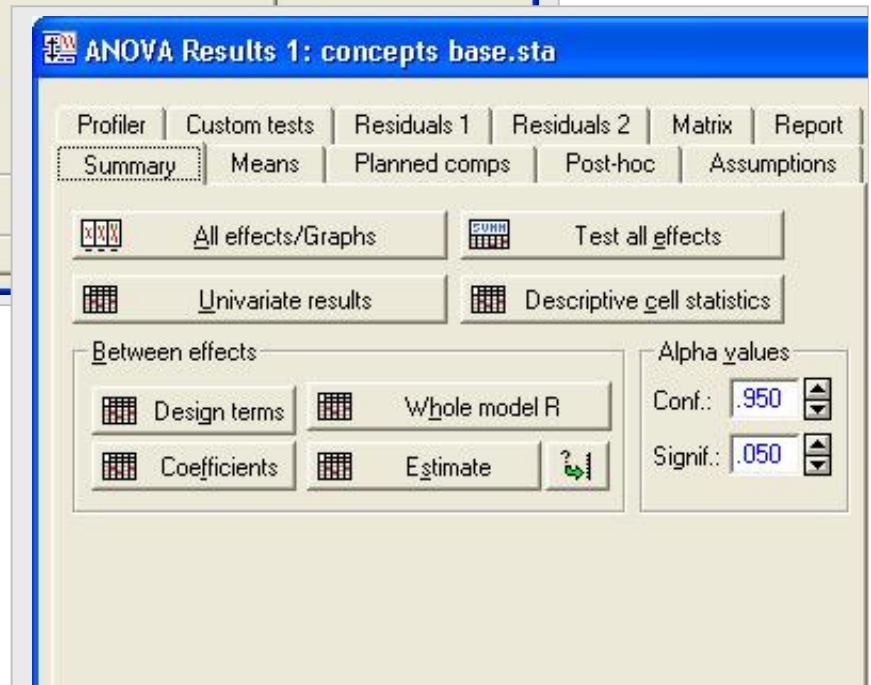
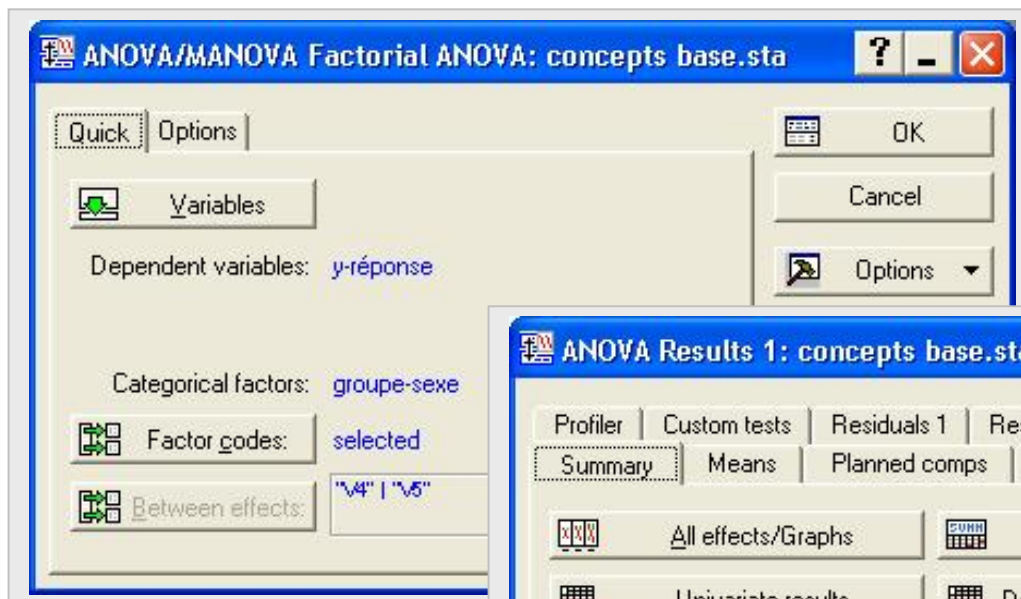
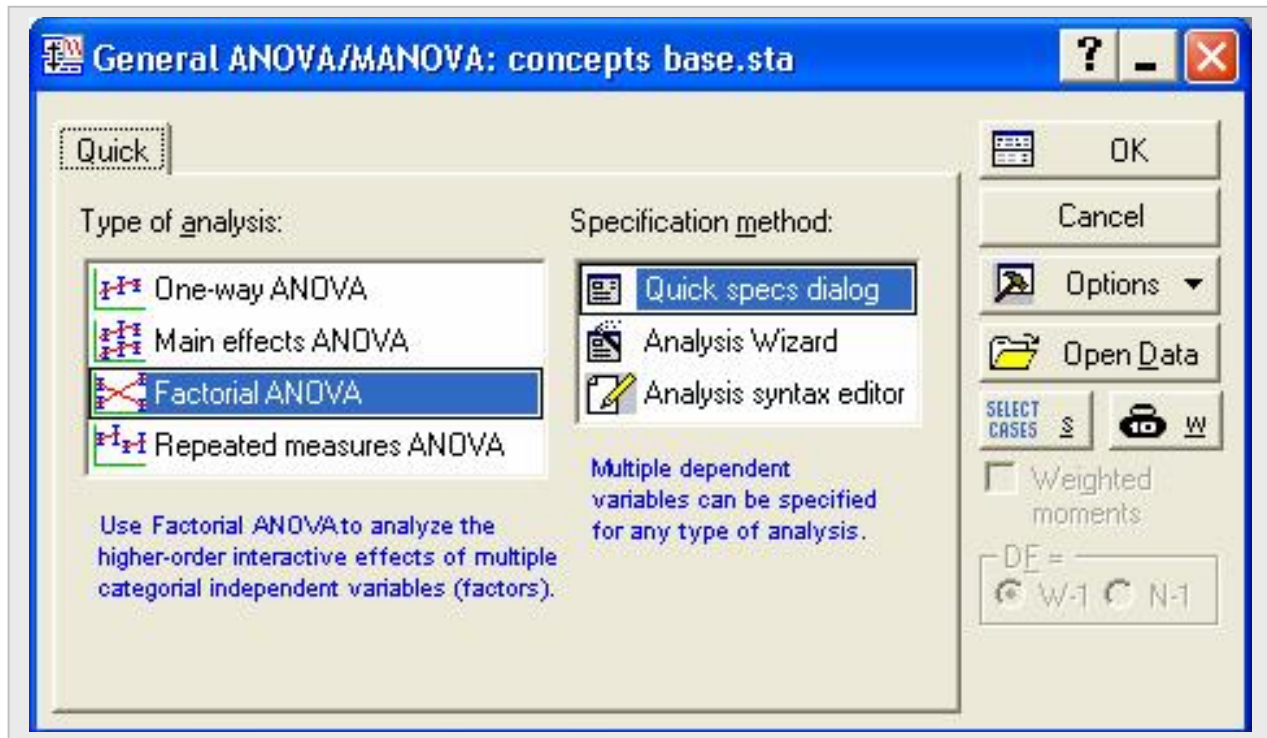
- § **étude observationnelle** (rétrospective) : on étudie l'influence de facteurs sans avoir affaire à des données provenant d'une expérience ;
- étude expérimentale** (prospective): les données proviennent d'une expérience planifiée où les modalités des facteurs sont affectées aux unités au hasard ;
- § **modèle linéaire général** : la régression et l'analyse de variance sont des cas particuliers de ce modèle qui est sans doute le plus fréquemment employé en analyse statistique ;
- § **test t de Student** : est un cas particulier de l'analyse de la variance : 1 facteur avec 2 modalités;
- § en général, les unités (sujets, individus statistiques) sont choisies au hasard parmi une population statistique ; lorsque l'on contrôle certains facteurs, on fait **l'assignation au hasard des traitements** (combinaison des facteurs contrôlés) aux unités ; si nécessaire, on fixe (contrôle) des facteurs secondaires sur les unités pour améliorer l'efficacité de l'étude (plans en blocs, ...) ;
- § **facteur intra** (within) : si la même unité statistique est mesurée plusieurs fois (temps, différentes conditions), on a un plan en mesures répétées ; le facteur enfoui dans la réponse est appelé facteur intra (within) ; on traite ce cas en définissant plusieurs variables de réponse et en analysant avec une analyse de variance multidimensionnelle (MANOVA) ; les réponses sont naturellement dépendantes car elles sont mesurées sur le même sujet ; on décompose la variabilité totale en *variabilité intra sujet* et en *variabilité inter sujet* (between) ;
- § **facteur inter** (between) : varie sur des groupes distincts de sujets ;
- § **analyse de covariance** à chaque fois que l'on mesure (contrôle indirect) une variable quantitative jouant un rôle de facteur et que l'on est en présence de d'autres facteurs qualitatifs ;
- § **facteurs emboîtés** (nested) : si les modalités prises par un facteur sont spécifiques aux modalités d'un autre facteur, le concept d'interaction entre les 2 facteurs emboîtés n'est pas défini;
- § reconnaître les **structures** (traitements, assignation) présentes dans les données est nécessaire si l'on veut réaliser la « bonne » analyse statistique ; il est plus facile si on a participé à la planification de l'étude et l'on connaît le domaine (contexte) d'application ; l'utilisation d'un logiciel statistique ne donne pas la réponse à ces questions ;
- § les **designs (plans) expérimentaux** sont généralement identifiés par la structure des traitements ou la structure d'assignation des traitements aux unités expérimentales.  
Exemples : plan factoriel complet, plan fractionnaire, plan complètement aléatoire, plan en bloc, plan incomplet, plan en carré Latin, plan en mesures répétées, plan avec facteurs aléatoires,....
- On distingue aussi les données par la méthode d'analyse statistique qui sera employée : ANOVA multifactorielle, analyse de covariance, analyse en mesures répétées, facteurs aléatoires,....

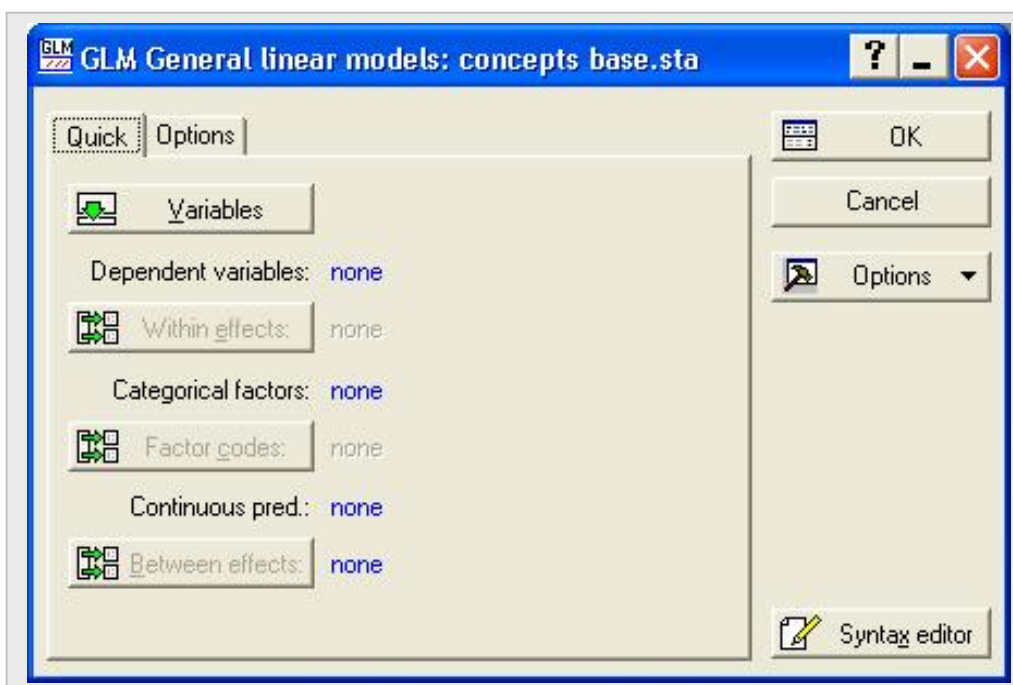
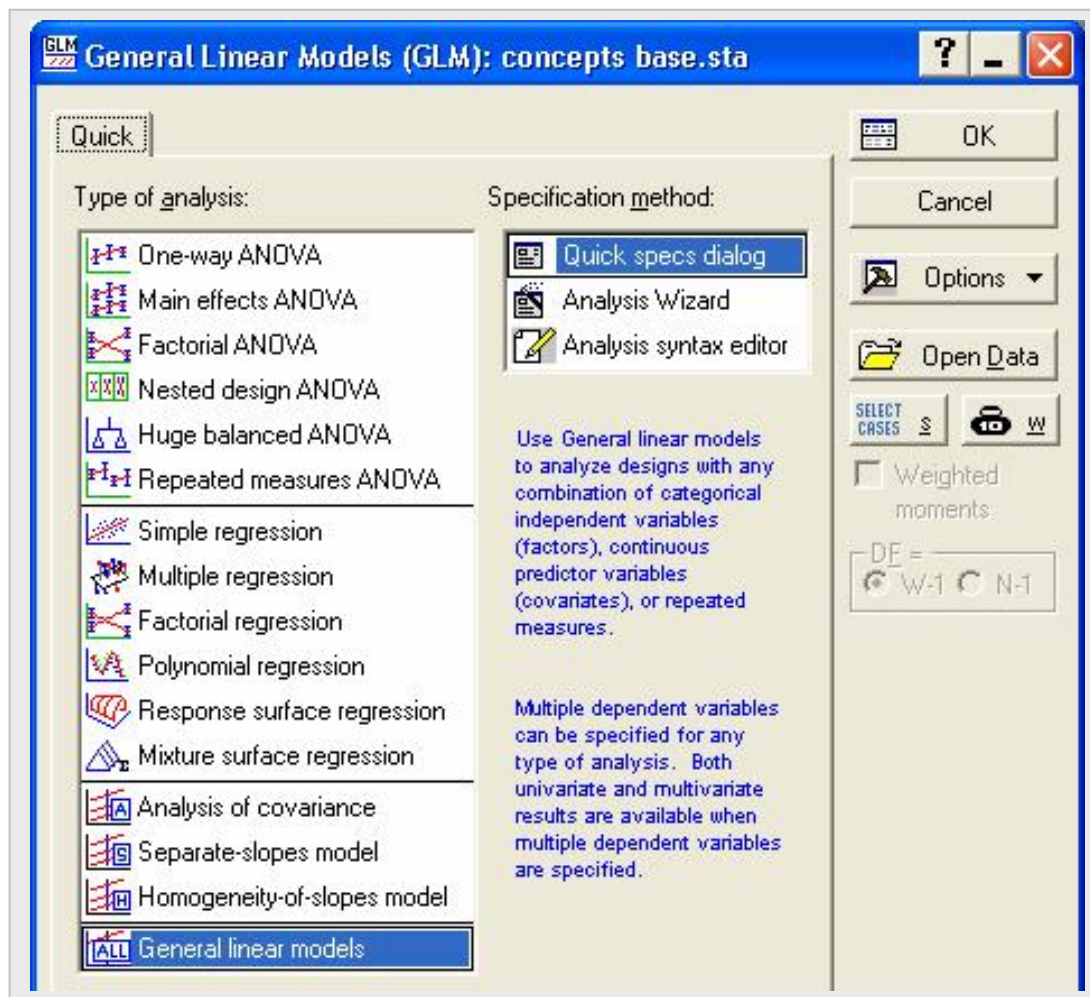
### 3. STATISTICA

La mise en œuvre d'une analyse de variance peut se faire avec plusieurs modules de *STATISTICA*.

- § Basic Statistics / Tables ..... Breakdown & **one-Way ANOVA**
- § **ANOVA**
- § **Advanced Linear / Non linear Models**
- § Experimental design (DOE)









**Exemple :** Y : ventes X<sub>1</sub> : dépenses publicité F : incorporation (oui, non)  
M : management (expérimenté, novice)

Posons X<sub>2</sub> = 1 si incorporée et X<sub>2</sub> = 0 autrement  
X<sub>3</sub> = 1 si expérimenté et X<sub>3</sub> = 0 autrement

$$\text{modèle du premier ordre } Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 \quad (6)$$

**modèle du premier ordre avec interactions**

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_4 X_1X_2 + b_5 X_1X_3 + b_6 X_2X_3 \quad (7)$$

L'Équation (7) génère 4 équations distinctes pour les 4 combinaisons de F x M

**Autre méthode de codage**

On peut remplacer les valeurs 0 et 1 par les valeurs -1 et 1.

**Exemple :** X<sub>1</sub> : dépenses publicité F : incorporation (oui, non)  
M : management (expérimenté, novice)  
Y : ventes

Posons X<sub>2</sub> = 1 si incorporée et X<sub>2</sub> = -1 sinon  
X<sub>3</sub> = 1 si expérimenté et X<sub>3</sub> = -1 sinon

$$\text{modèle du premier ordre } Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 \quad (8)$$

incorporation	management	modèle	
oui	expérimenté	$Y = (\beta_0 + \beta_2 + \beta_3) + \beta_1X_1$	(9)
oui	novice	$Y = (\beta_0 + \beta_2 - \beta_3) + \beta_1X_1$	(10)
non	expérimenté	$Y = (\beta_0 - \beta_2 + \beta_3) + \beta_1X_1$	(11)
non	novice	$Y = (\beta_0 - \beta_2 - \beta_3) + \beta_1X_1$	(12)

**Seconde alternative de codage**

On utilise c variables indicatrices pour les c modalités de la variable qualitative et on enlève le terme d'intercepte  $\beta_0$  dans le modèle de régression.

**Exemple :** Y : usure outil X<sub>1</sub> : vitesse d'opération M : manufacturier (M 1, M2, M3, M4)

Posons X<sub>2</sub> = 1 si M1 et X<sub>2</sub> = 0 autrement  
X<sub>3</sub> = 1 si M2 et X<sub>3</sub> = 0 autrement  
X<sub>4</sub> = 1 si M3 et X<sub>4</sub> = 0 autrement  
X<sub>5</sub> = 1 si M4 et X<sub>5</sub> = 0 autrement

$$\text{Modèle } Y = b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_4X_4 + b_5X_5 \quad (13)$$

$$M1 : Y = \beta_2 + \beta_1X_1 \quad (14)$$

$$M2 : Y = \beta_3 + \beta_1X_1 \quad (15)$$

$$M3 : Y = \beta_4 + \beta_1X_1 \quad (16)$$

$$M4 : Y = \beta_5 + \beta_1X_1 \quad (17)$$

Il faut faire l'ajustement de moindres carrés du **modèle de régression (13) sans intercepte**.

Cette seconde alternative de codage n'est pas recommandée. Elle ne permet pas de comparer facilement les modèles car ils ne sont pas emboîtés. *Si on ajoute un intercepte dans le modèle (13), on se trouve en situation de multi collinéarité parfaite :  $X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 1$*



**Exemple:** 2 variables qualitatives et 3 variables quantitatives

**espace expérimental**

<u>lettre</u>	<u>facteur</u>	<u>type</u>	<u>valeurs</u>	<u># modalités</u>
A	type sol	qualitative	a, b, c, d	4
B	type d'oxidant	qualitative	p, h, r	3
C	pH	quantitative	5, 7, 9	3
D	temperature	quantitative	20, 30, 40 (deg. C)	3
E	temps réaction	quantitative	2, 16, 30 (jour)	3
nombre total de combinaisons			4x3x3x3x3=324	

**codage des facteurs qualitatifs**

	<u>facteur</u>	<u>valeur</u>	<u>variables indicatrices</u>		
			<u>z1</u>	<u>z2</u>	<u>z3</u>
<b>A</b>		a	0	0	0
		b	1	0	0
		c	0	1	0
		d	0	0	1
			<u>w1</u>	<u>w2</u>	
<b>B</b>		p	0	0	
		h	1	0	
		r	0	1	

**codage des variables quantitatives**

<u>facteur</u>	<u>codage</u>	<u>valeurs codées</u>
<b>C</b>	$X_1 = (C - 7) / 2$	-1 0 1
<b>D</b>	$X_2 = (D - 30) / 10$	-1 0 1
<b>E</b>	$X_3 = (E - 16) / 14$	-1 0 1

**modèle polynomial du deuxième ordre**

$$\begin{aligned}
 Y = & \beta_0 + \sum \beta_j x_j + \sum \beta_{jj} x_j^2 + \sum \sum_{j \neq k} \beta_{jk} x_j x_k \\
 & + \gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 + \gamma_3 z_3 + \eta_1 w_1 + \eta_2 w_2 \\
 & + \sum \sum \delta_{js} x_j z_s + \sum \sum \delta_{jjs} x_j^2 z_s + \sum \sum \sum_{s \neq j \neq k} \delta_{jks} x_j x_k z_s \\
 & + \sum \sum \alpha_{jt} x_j w_t + \sum \sum \alpha_{jjt} x_j^2 w_t + \sum \sum \sum_{t \neq j \neq k} \alpha_{jks} x_j x_k w_t + \varepsilon
 \end{aligned} \tag{18}$$

Puisque les variables Z1, Z2, Z3, W1, W2 ne prennent que des valeurs 0 ou 1, on peut écrire le modèle (18) sous la forme suivante :

$$Y = \theta_0 + \sum \theta_j x_j + \sum \theta_{jj} x_j^2 + \sum \sum_{j \neq k} \theta_{jk} x_j x_k + \varepsilon \tag{19}$$

Les coefficients  $\theta$  sont des sommes des coefficients  $\beta, \gamma, \eta, \delta, \alpha$ . Ces relations sont définies dans le tableau.

cas	A			B		relations entre les paramètres
	z1	z2	z3	w1	w2	
1	a	0	0	p	0	$\theta_0 = \beta_0$ $\theta_j = \beta_j$ $\theta_{jj} = \beta_{jj}$ $\theta_{jk} = \beta_{jk}$
						$j \neq k$
2	a	0	0	h	1	$\theta_0 = \beta_0 + \eta_1$ $\theta_j = \beta_j + \alpha_{j1}$ $\theta_{jj} = \beta_{jj} + \alpha_{jj1}$ $\theta_{jk} = \beta_{jk} + \alpha_{jk1}$
						$j \neq k$
3	a	0	0	r	0	$\theta_0 = \beta_0 + \eta_2$ $\theta_j = \beta_j + \alpha_{j2}$ $\theta_{jj} = \beta_{jj} + \alpha_{jj2}$ $\theta_{jk} = \beta_{jk} + \alpha_{jk2}$
						$j \neq k$
4	b	1	0	p	0	$\theta_0 = \beta_0 + \gamma_1$ $\theta_j = \beta_j + \delta_{j1}$ $\theta_{jj} = \beta_{jj} + \delta_{jj1}$ $\theta_{jk} = \beta_{jk} + \delta_{jk1}$
						$j \neq k$
5	b	1	0	h	1	$\theta_0 = \beta_0 + \gamma_1 + \eta_1$ $\theta_j = \beta_j + \delta_{j1} + \alpha_{j1}$ $\theta_{jj} = \beta_{jj} + \delta_{jj1} + \alpha_{jj1}$ $\theta_{jk} = \beta_{jk} + \delta_{jk1} + \alpha_{jk1}$
						$j \neq k$
6	b	1	0	r	0	$\theta_0 = \beta_0 + \gamma_1 + \eta_2$ $\theta_j = \beta_j + \delta_{j1} + \alpha_{j2}$ $\theta_{jj} = \beta_{jj} + \delta_{jj1} + \alpha_{jj2}$ $\theta_{jk} = \beta_{jk} + \delta_{jk1} + \alpha_{jk2}$
						$j \neq k$
7	c	0	1	p	0	$\theta_0 = \beta_0 + \gamma_2$ $\theta_j = \beta_j + \delta_{j2}$ $\theta_{jj} = \beta_{jj} + \delta_{jj2}$ $\theta_{jk} = \beta_{jk} + \delta_{jk2}$
						$j \neq k$
8	c	0	1	h	1	$\theta_0 = \beta_0 + \gamma_2 + \eta_1$ $\theta_j = \beta_j + \delta_{j2} + \alpha_{j1}$ $\theta_{jj} = \beta_{jj} + \delta_{jj2} + \alpha_{jj1}$ $\theta_{jk} = \beta_{jk} + \delta_{jk2} + \alpha_{jk1}$
						$j \neq k$
9	c	0	1	r	0	$\theta_0 = \beta_0 + \gamma_2 + \eta_2$ $\theta_j = \beta_j + \delta_{j2} + \alpha_{j2}$ $\theta_{jj} = \beta_{jj} + \delta_{jj2} + \alpha_{jj2}$ $\theta_{jk} = \beta_{jk} + \delta_{jk2} + \alpha_{jk2}$
						$j \neq k$
10	d	0	0	p	1	$\theta_0 = \beta_0 + \gamma_3$ $\theta_j = \beta_j + \delta_{j3}$ $\theta_{jj} = \beta_{jj} + \delta_{jj3}$ $\theta_{jk} = \beta_{jk} + \delta_{jk3}$
						$j \neq k$
11	d	0	0	h	1	$\theta_0 = \beta_0 + \gamma_3 + \eta_1$ $\theta_j = \beta_j + \delta_{j3} + \alpha_{j1}$ $\theta_{jj} = \beta_{jj} + \delta_{jj3} + \alpha_{jj1}$ $\theta_{jk} = \beta_{jk} + \delta_{jk3} + \alpha_{jk1}$
						$j \neq k$
12	d	0	0	r	1	$\theta_0 = \beta_0 + \gamma_3 + \eta_2$ $\theta_j = \beta_j + \delta_{j3} + \alpha_{j2}$ $\theta_{jj} = \beta_{jj} + \delta_{jj3} + \alpha_{jj2}$ $\theta_{jk} = \beta_{jk} + \delta_{jk3} + \alpha_{jk2}$
						$j \neq k$

**Autres applications des variables indicatrices**

- § **modèle de régression par morceaux ;**
- § **discontinuité dans un modèle de régression ;**
- § **séries chronologiques ;**
- § **remplacement de variables quantitatives avec des banques de données abondantes :  
plusieurs centaines / milliers d'observations**

## 5. ANOVA À UN FACTEUR

### Contexte

**facteur A** : modalités (niveaux) 1, 2, ... , g    g : nombre de modalités (niveaux, groupes)

cas 1 : classification des unités : étude observationnelle / rétrospective

cas 2 : expérimentation : modalités sont affectés au hasard aux unités

facteur fixe : conclusions valables que pour ces modalités - **modèle à effets fixes**

facteur aléatoire : échantillon au hasard d'une population de modalités

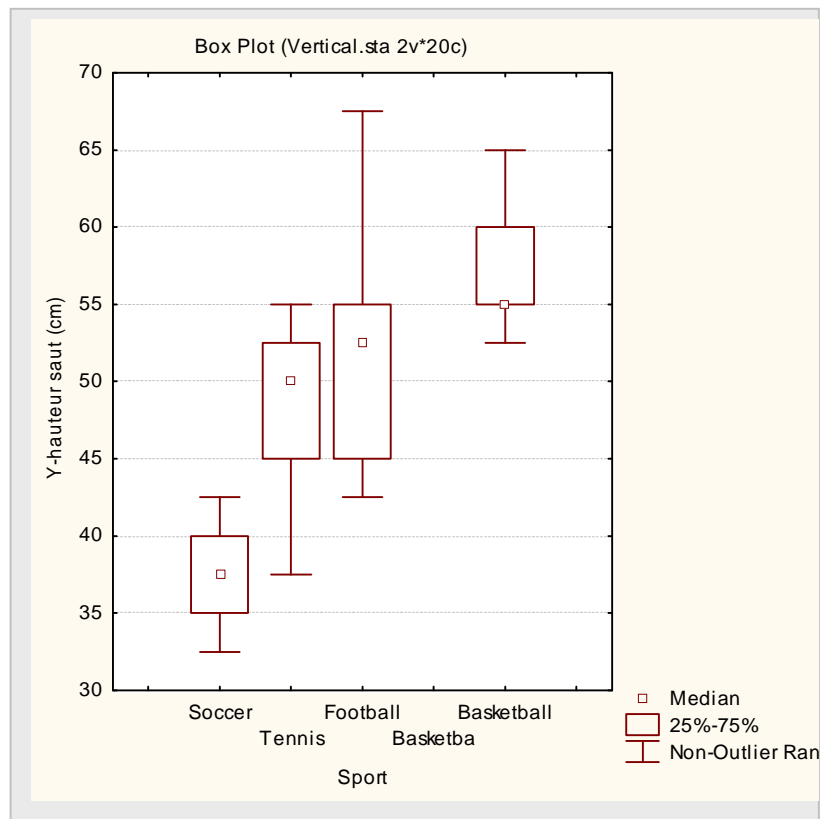
les conclusions s'appliquent à cette population – **modèle à effets aléatoires**

**réponse Y** : variable quantitative

### Exemple 4 : hauteur

comparaison de 4 groupes  
d'athlètes  
habilité à sauter en hauteur

id	Sport	Y- hauteur saut (cm)
1	Soccer	38
2	Soccer	43
3	Soccer	33
4	Soccer	40
5	Soccer	35
6	Tennis	45
7	Tennis	53
8	Tennis	38
9	Tennis	55
10	Tennis	50
11	Football	55
12	Football	68
13	Football	43
14	Football	45
15	Football	53
16	Basketball	60
17	Basketball	65
18	Basketball	55
19	Basketball	53
20	Basketball	55



données						
niveau	observations	$y_{ij}$	moyennes	# obs.	variances	
1	$y_{11} \ y_{12} \ \dots$	$y_{1n1}$	$\bar{y}_{1.}$	$n_1$	$s_1^2$	$y_{i.} = \sum y_{ij}$ $\bar{y}_{..} = \frac{1}{N} \sum \sum y_{ij}$ $y_{i.} = y_{i.} / n_i$ $N = \sum n_i$ $\bar{y}_{..} = \bar{y}_{..} / N$ $SS_i = \sum (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2$ $s_i^2 = SS_i / (n_i - 1)$
2	$y_{21} \ y_{22} \ \dots$	$y_{2n2}$	$\bar{y}_{2.}$	$n_2$	$s_2^2$	
.	.....					
i	$y_{i1} \ y_{i2} \ \dots$	$y_{ini}$	$\bar{y}_{i.}$	$n_i$	$s_i^2$	
.	.....					
g	$y_{g1} \ y_{g2} \ \dots$	$y_{gng}$	$\bar{y}_{g.}$	$n_g$	$s_g^2$	
tous			$\bar{y}_{..}$	N		

**Modèle de type MOYENNES DES CELLULES**

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, g \quad j = 1, 2, \dots, n_i \quad (20)$$

$Y_{ij}$  : valeur de la variable de réponse j-ième essai modalité i du facteur  
 $\mu_i$  : paramètre - moyenne de la cellule i  
 $\varepsilon_{ij}$  : erreurs aléatoires indépendantes distribuées  $N(0, \sigma^2)$

**conséquences**

$$E(Y_{ij}) = \mu_i$$

$$Var(Y_{ij}) = Var(\varepsilon_{ij}) = \sigma^2$$

$$Y_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma^2) \quad \sim : \text{symbole pour « distribuée comme »}$$

**Modèle linéaire général : notation matricielle**

$$Y = X \beta + \varepsilon \quad (21)$$

**Y** : vecteur  $N \times 1$  d'observations (données)  
**X** : matrice du modèle  $N \times p$   
 fonctions des k variables (facteurs) explicatives  
 **$\beta$**  : vecteur  $p \times 1$  de paramètres (statistiques) à estimer  
 **$\varepsilon$**  : vecteur  $N \times 1$  d'erreur + hypothèse de normalité

**remarque** : la *linéarité* est relative à  $\beta$  et non pas aux variables  $X_1, X_2, \dots$

**questions** : plan collecte données, estimation de  $\beta$ , validation du modèle, tests d'hypothèses, etc.

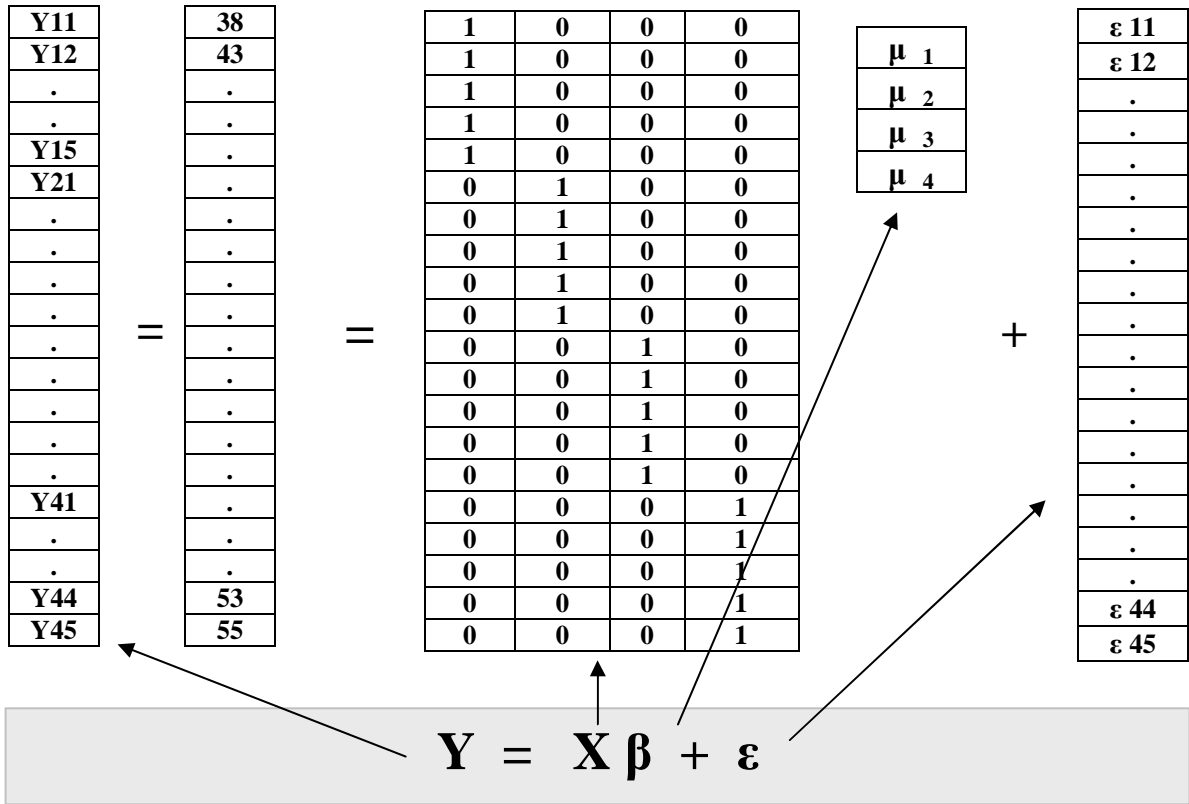
**Modèle linéaire GÉNÉRALISÉ** :  $Z = g(Y) = X \beta + \varepsilon$        $g$  : fonction de lien

distribution	fonction de lien	nom
normale	$Z = g(Y) = Y$	identité
log normale	$Z = g(y) = \log(Y)$	log
	$Z = g(Y) = Y^a$	puissance
binaire (0-1)	$Z = g(Y) = \log(Y/(1-Y))$	logit
	$Z = g(Y) = \text{invnorm}(Y)$ ,	probit
	$Z = g(Y) = \log(-\log(1-Y))$	logit complémentaire

Ces transformations permettent d'étendre l'application du modèle linéaire à des variables de réponse Y dont la nature et la distribution ne suit pas le cas classique.

**Exemple 4 (suite) : hauteur**

$g = 4$        $n_i = n = 5$        $N = 20$        $Y : 20 \times 1$        $X : 20 \times 4$        $\epsilon : 20 \times 1$



**Ajustement du modèle : principe des moindres carrés**

$$\text{Minimum } Q = \sum \sum (Y_{ij} - \mu_i)^2$$

$$\text{Solution } \hat{\mu}_i = \bar{Y}_{i.} \text{ et } \hat{Y}_{ij} = \bar{Y}_{i.}$$

**Tableau d'analyse de la variance : ANOVA**

SOURCE	SOMME CARRÉS (SS)	deg. lib.	CARRÉ MOYEN (MS)	F
Traitements	$SS_{\text{trait}} = \sum n_i \sum (y_{i.} - \bar{y}_{..})^2$	$g - 1$	$MS_{\text{trait}}$	$F_0 = MS_{\text{trait}} / MSE$
Erreur	$SS_{\text{erreur}} = \sum \sum (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2$	$N - g$	$MSE = \hat{\sigma}^2$	
Total	$SS_{\text{total}} = \sum \sum (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$	$N - 1$		

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_g$  hypothèse nulle d'égalité des moyennes

Rejet de  $H_0$  si  $F_0 > F(g - 1, N - g, 1 - \alpha)$  (loi F de Fisher-Snedecor)

où  $F(g - 1, N - g, 1 - \alpha)$  est le  $(1 - \alpha)^{\text{ième}}$  percentile loi F (g -1, N-g)  
avec  $g - 1$  degrés de liberté au numérateur  
et  $N - g$  degrés de liberté au dénominateur

## Équation fondamentale de la décomposition de la variabilité

$$\sum \sum (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = \sum n_i \sum (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + \sum \sum (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2$$

$$SS_{\text{total}} = SS_{\text{traitement}} + SS_{\text{erreur}}$$

$$Df_{\text{total}} = N - 1 = (g - 1) + (N - g) = Df_{\text{traitement}} + Df_{\text{erreur}}$$

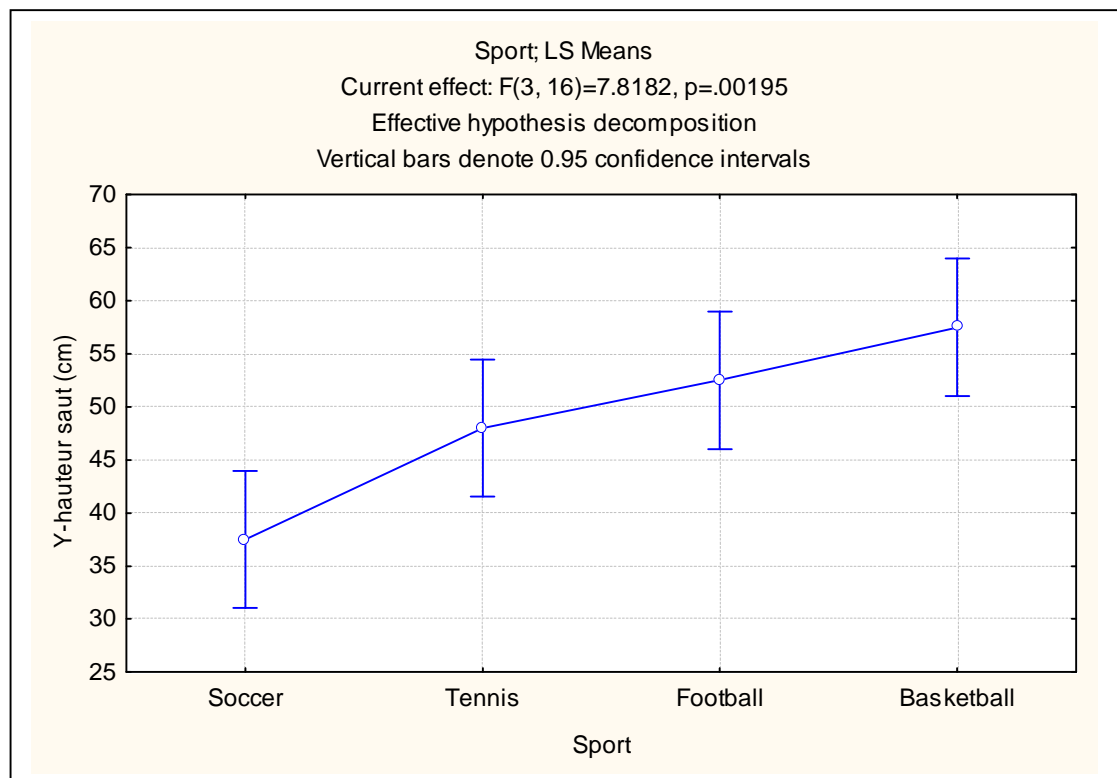
$$E(MSE) = \sigma^2$$

$$E(MS_{\text{trait}}) = \sigma^2 + \sum n_i (\mu_i - \mu)^2 / (g - 1)$$

$$\text{où } \mu = \sum n_i \mu_i / (N - 1)$$

### Exemple 4 : suite

ANOVA					
	SS	Df	MS	F	p
Intercept	47775.31	1	47775.31	1029.502	0.000000
Sport	1088.44	3	362.81	7.818	0.001952
Erreur	742.50	16	46.41		



**Modèle de type EFFETS**

$$\begin{aligned} \mu_i &= \mu + (\mu_i - \mu) = \mu + \tau_i \\ Y_{ij} &= \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, g \quad j = 1, 2, \dots, n_i \quad (22) \\ Y_{ij} &: \text{valeur de la variable de réponse } j\text{-ième essai modalité } i \text{ du facteur} \\ \mu &: \text{effet général} \\ \tau_i &: \text{effet différentiel de la modalité } i \text{ du facteur} \\ \varepsilon_{ij} &: \text{erreurs aléatoires indépendantes distribuées } N(0, \sigma^2) \end{aligned}$$

conséquences

$$\begin{aligned} E(Y_{ij}) &= \mu + \tau_i \\ \text{Var}(Y_{ij}) &= \text{Var}(\varepsilon_{ij}) = \sigma^2 \\ Y_{ij} &\sim N(\mu + \tau_i, \sigma^2) \end{aligned}$$

**Définition de  $\mu$  : 2 possibilités**

définition 1       $\mu = \sum \mu_i / g$       (23)

$$\sum \tau_i = 0 \quad (24)$$

définition 2       $\mu = \sum \omega_i \mu_i \quad \sum \omega_i = 1$       (25)

$$\sum \omega_i \tau_i = 0 \quad (26)$$

**exemples de la définition 2**

**exemple A :** parc véhicules automobiles composée de  
 50 % compactes      30% berlines      20% VUS  
 Y : consommation essence  
 $\mu = 0.5 * \mu_1 + 0.3 * \mu_2 + 0.2 * \mu_3$

**exemple B :**  $\omega_i = n_i / N$   
 cas particulier : si  $n_i = n$  alors (25) donne (23)

Hypothèse       $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_g$        $H_a : \mu_i$  pas tous égaux  
 $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_g = 0$        $H_a : \tau_i \neq 0$  pour au moins un i

**Approche par régression**

$$\begin{aligned} Y_{ij} &= \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad \sum \tau_i = 0 \quad (27) \\ \tau_g &= -\tau_1 - \tau_2 - \dots - \tau_{g-1} \end{aligned}$$

**Exemple 4 (suite) :** saut en hauteur       $g = 4$        $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 5$        $N = 20$

Posons

$$X_{ij t} = \begin{cases} 1 & \text{si observation provient du groupe } t = 1, 2, \dots, g - 1 \\ -1 & \text{si observation provient groupe } g \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

(27) devient       $Y_{ij} = \mu + \tau_1 X_{ij1} + \tau_2 X_{ij2} + \tau_3 X_{ij3} + \varepsilon_{ij}$       (28)



	$X_{ij0}$	$X_{ij1}$	$X_{ij2}$	$X_{ij3}$		
38	1	1	0	0	$\mu$	$\epsilon_{11}$
43	1	1	0	0		.
33	1	1	0	0	$\tau_1$	.
40	1	1	0	0		.
35	1	1	0	0	$\tau_2$	.
45	1	0	1	0		.
53	1	0	1	0	$\tau_3$	.
38	1	0	1	0		.
55	1	0	1	0	.	
50	1	0	1	0	.	
55	1	0	0	1	.	
68	1	0	0	1	.	
43	1	0	0	1	.	
45	1	0	0	1	.	
53	1	0	0	1	.	
60	1	-1	-1	-1	.	
65	1	-1	-1	-1	.	
55	1	-1	-1	-1	.	
53	1	-1	-1	-1	.	
55	1	-1	-1	-1	$\epsilon_{45}$	

$$Y = X \beta + \epsilon$$

id	Sport	i	j	X1	X2	X3	Y-hauteur saut (cm)
1	Soccer	1	1	1	0	0	38
2	Soccer	1	2	1	0	0	43
3	Soccer	1	3	1	0	0	33
4	Soccer	1	4	1	0	0	40
5	Soccer	1	5	1	0	0	35
6	Tennis	2	1	0	1	0	45
7	Tennis	2	2	0	1	0	53
8	Tennis	2	3	0	1	0	38
9	Tennis	2	4	0	1	0	55
10	Tennis	2	5	0	1	0	50
11	Football	3	1	0	0	1	55
12	Football	3	2	0	0	1	68
13	Football	3	3	0	0	1	43
14	Football	3	4	0	0	1	45
15	Football	3	5	0	0	1	53
16	Basketball	4	1	-1	-1	-1	60
17	Basketball	4	2	-1	-1	-1	65
18	Basketball	4	3	-1	-1	-1	55
19	Basketball	4	4	-1	-1	-1	53
20	Basketball	4	5	-1	-1	-1	55

Analyse par régression : exemple 4

R= 0.77 R²= 0.594 Adjusted R²= 0.518 F(3,16)=7.8182 p						
	Beta	Std.Err.	B	Std.Err.	t(16)	p-level
Intercept			48.88	1.52	32.09	0.0000
X1	-0.841	0.195	-11.38	2.64	-4.31	0.0005
X2	-0.065	0.195	-0.88	2.64	-0.33	0.7445
X3	0.268	0.195	3.63	2.64	1.37	0.1884

Analysis of Variance; DV: Y-hauteur saut (cm)					
	Sums of	df	Mean	F	p-level
Regress.	1088.44	3	362.81	7.8182	0.0020
Residual	742.50	16	46.41		
Total	1830.94				

Modèle de type EFFETS DE FACTEURS avec moyenne pondérée :  $\omega_i = n_i / N$

$$Y_{ij} = \mu + \tau_1 X_{ij1} + \tau_2 X_{ij2} + \tau_3 X_{ij3} + \varepsilon_{ij} \tag{29}$$

$$\sum (n_i / N) \tau_i = 0$$

$$\tau_g = (-n_1 / n_g) \tau_1 + (-n_2 / n_g) \tau_2 + \dots + (-n_{g-1} / n_g) \tau_{g-1} \tag{30}$$

Posons

$$X_{ij t} = \begin{cases} 1 & \text{si observation provient du groupe } t = 1, 2, \dots, g - 1 \\ (-n_i / n_g) & \text{si observation provient groupe } g \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

**Exemple 5** : ventes selon le design d'emballage

- 1 : 3 couleurs + 0 personnages BD      2 : 3 couleurs + personnages BD
- 2 : 5 couleurs + 0 personnages BD      4 : 5 couleurs + personnages BD

	Embal- lage	maga sin	Y-caisses vendues	X1	X2	X3
1	1	1	11	1	0	0
2	1	2	17	1	0	0
3	1	3	16	1	0	0
4	1	4	14	1	0	0
5	1	5	15	1	0	0
6	2	1	12	0	1	0
7	2	2	10	0	1	0
8	2	3	15	0	1	0
9	2	4	19	0	1	0
10	2	5	11	0	1	0

11	3	1	23	0	0	1
12	3	2	20	0	0	1
13	3	3	18	0	0	1
14	3	4	17	0	0	1
15	4	1	27	-1	-1	-0.8
16	4	2	33	-1	-1	-0.8
17	4	3	22	-1	-1	-0.8
18	4	4	26	-1	-1	-0.8
19	4	5	28	-1	-1	-0.8

$g = 4$     $n_1 = 5$     $n_2 = 5$     $n_3 = 4$     $n_4 = 5$     $N = 19$

Regression Summary for Dependent Variable: Y-caisses vendues R=0.8877 R <sup>2</sup> =0.7880 Adjusted R <sup>2</sup> = 0.7456 F(3,15)=18.591 p						
	Beta	Std.Err.	B	Std.Err.	t(15)	p-level
Intercept			18.63	0.75	25.01	0.0000
X1	-0.47	0.1443	-4.03	1.25	-3.23	0.0056
X2	-0.61	0.1443	-5.23	1.25	-4.20	0.0008
X3	0.09	0.1417	0.87	1.44	0.60	0.5562

Analysis of Variance; DV: Y-caisses vendues					
	Sums of	df	Mean	F	p-level
Regress.	588.22	3	196.07	18.59	0.00003
Residual	158.20	15	10.55		
Total	746.42				

**Nombre d'observations pour des études avec un facteur**

La puissance du test F = probabilité de rejeter  $H_0$  si  $H_a$  est vraie

$$\text{Puissance} = \text{Prob} ( F > F_{1-\alpha, g-1, N-g} \mid \Phi ) \tag{31}$$

=  $H(\Phi, g, N, \alpha, )$  distribution F non centrale paramètre

$$\Phi = (1 / \sigma) [ \sum n_i ( \mu_i - \mu )^2 / g ]^{0.5} \quad \mu = \sum \mu_i / g \tag{32}$$

$\Phi$  : paramètre de non centralité

Si  $n_i = n$   $\Phi = (1 / \sigma) [(n / g) \sum ( \mu_i - \mu )^2 / g ]^{0.5}$

$\Delta = \max ( \mu_i ) - \min ( \mu_j ) \quad n = h( g, \alpha, \Delta / \sigma )$

**Puissance = 0.90**  $n$  = nombre d'observations dans chaque groupe

	$\Delta/\sigma=1$	$\Delta/\sigma=1$	$\Delta/\sigma=1$	$\Delta/\sigma=1.5$	$\Delta/\sigma=1.5$	$\Delta/\sigma=1.5$	$\Delta/\sigma=2$	$\Delta/\sigma=2$	$\Delta/\sigma=2$
<b>g</b>	<b><math>\alpha = 0.1</math></b>	<b><math>\alpha = 0.05</math></b>	<b><math>\alpha = 0.01</math></b>	<b><math>\alpha = 0.1</math></b>	<b><math>\alpha = 0.05</math></b>	<b><math>\alpha = 0.01</math></b>	<b><math>\alpha = 0.1</math></b>	<b><math>\alpha = 0.05</math></b>	<b><math>\alpha = 0.01</math></b>
<b>2</b>	18	23	32	9	11	15	6	7	10
<b>3</b>	22	27	37	11	13	18	7	8	11
<b>4</b>	25	30	40	12	14	19	7	9	12
<b>5</b>	27	32	43	13	15	20	8	9	12
<b>6</b>	29	34	46	14	16	21	8	10	13
<b>7</b>	31	36	48	14	17	22	9	10	13
<b>8</b>	32	38	50	15	18	23	9	11	14
<b>9</b>	33	40	52	16	18	24	9	11	14
<b>10</b>	35	41	54	16	19	25	10	11	15

**Puissance = 0.95**  $n$  = nombre d'observations dans chaque groupe

	$\Delta/\sigma=1$	$\Delta/\sigma=1$	$\Delta/\sigma=1$	$\Delta/\sigma=1.5$	$\Delta/\sigma=1.5$	$\Delta/\sigma=1.5$	$\Delta/\sigma=2$	$\Delta/\sigma=2$	$\Delta/\sigma=2$
<b>g</b>	<b><math>\alpha = 0.1</math></b>	<b><math>\alpha = 0.05</math></b>	<b><math>\alpha = 0.01</math></b>	<b><math>\alpha = 0.1</math></b>	<b><math>\alpha = 0.05</math></b>	<b><math>\alpha = 0.01</math></b>	<b><math>\alpha = 0.1</math></b>	<b><math>\alpha = 0.05</math></b>	<b><math>\alpha = 0.01</math></b>
<b>2</b>	23	27	38	11	13	18	7	8	11
<b>3</b>	27	32	43	13	15	20	8	9	12
<b>4</b>	30	36	47	14	17	22	9	10	13
<b>5</b>	33	39	51	15	18	23	9	11	14
<b>6</b>	35	41	53	16	19	25	10	11	15
<b>7</b>	37	43	56	17	20	26	10	12	15
<b>8</b>	39	45	58	18	21	27	11	12	16
<b>9</b>	40	47	60	19	22	28	11	13	16
<b>10</b>	42	48	62	19	22	29	11	13	17

## 6. ANALYSE DES MOYENNES ET COMPARAISONS MULTIPLES

Si le test F est significatif cela veut dire que les moyennes sont statistiquement différentes. Peut-on dire plus ? Sont-elles toutes différentes ? Sinon, quelle moyenne diffère de quelle autre ?

Peut-on faire des comparaisons (contrastes) entre des groupes de moyennes?

Toutes ces questions constituent l'analyse a posteriori (post-hoc) des moyennes. Elles font intervenir le problème de comparaisons multiples sur le même ensemble de données. Il faut contrôler les risques associés à ces comparaisons multiples.

On veut contrôler le risque et avoir un coefficient de confiance global de  $1 - \alpha$  sur l'ensemble des comparaisons (tests). En effet, si on fait un nombre de  $k$  comparaisons, chacune avec un coefficient de confiance de  $1 - \alpha$ , alors le coefficient de confiance global sur l'ensemble des  $k$  comparaisons diminue. En d'autres termes, plus on multiplie le nombre de comparaisons (tests), plus on augmente les chances de conclure à tort. Le tableau suivant illustre le problème :

nombre de modalités $g$	nombre de comparaisons $k = g*(g-1)/2$	coefficient de confiance global $(1 - \alpha)^k$	$1 - \alpha = 0.95$
2	1	$1 - \alpha$	0.95
3	3	$(1 - \alpha)^3$	0.86
4	6	$(1 - \alpha)^6$	0.735
5	10	$(1 - \alpha)^{10}$	0.60
6	15	$(1 - \alpha)^{15}$	0.46
8	28	$(1 - \alpha)^{28}$	0.24
10	45	$(1 - \alpha)^{45}$	0.10

Il est impératif que le risque global soit contrôlé et équivalent au risque de l'ANOVA. On distingue 2 catégories de tests :

- § tests (comparaisons) planifiés avant l'exécution des calculs
- § tests suggérés après l'analyse (post hoc, a posteriori) (« data snooping »)

### A - intervalle de confiance pour une moyenne particulière

$$\mu_i : \bar{Y}_{i.} \pm t(1 - \alpha/2, N - g) * MSE^{0.5} * [1/n_i]^{0.5} \quad (33)$$

où  $t(1 - \alpha/2, N - g)$  :  $(1 - \alpha/2)^{i\text{ème}}$  percentile loi T de Student  
avec  $(N - g)$  degrés de liberté  
 $1 - \alpha$  : coefficient de confiance

exemple : données sur le design d'emballage

$$\bar{Y}_{1.} = 13.4 \quad MSE = 10.55 \quad 1 - \alpha = 0.95 \quad t(0.95, 15) = 2.13$$

$$11.5 \leq \mu_1 \leq 17.7$$

**B – intervalle de confiance pour la différence entre 2 moyennes**

$$i \neq i' \quad \mu_i - \mu_{i'} : (\bar{Y}_i - \bar{Y}_{i'}) \pm t(1 - \alpha/2, N - g) * \text{MSE}^{0.5} * [(1/n_i) + (1/n_{i'})]^{0.5} \quad (34)$$

**exemple** : données sur le design d'emballage

type emballage	1	2	3	4
moyenne	14.6	13.4	19.5	27.2
nombre obs.	5	5	4	5

$$1 - \alpha = 0.95 \quad \mu_3 - \mu_4 : (19.5 - 27.2) \pm 2.13 * 10.55^{0.5} * [(1/5) + (1/4)]^{0.5}$$

$$- 12.3 \leq \mu_3 - \mu_4 \leq - 3.7$$

**C – contraste**

$$L = \sum c_i \mu_i \quad \sum c_i = 0 \quad (35)$$

la différence entre 2 moyennes est un cas particulier de contraste

$$\hat{L} = \sum c_i \bar{Y}_i$$

$$s(\hat{L}) = \text{MSE}^{0.5} * [\sum c_i^2 / n_i]^{0.5}$$

$$(\hat{L} - L) / s(\hat{L}) \text{ suit une loi Student avec } (N - g) \text{ degrés de liberté} \quad (36)$$

**application** :  $H_0 : L = 0$  vs  $H_a : L \neq 0$ 

$$\text{rejet de } H_0 \text{ si } [ \hat{L} / s(\hat{L}) ] > t(1 - \alpha/2, N - g) \quad (37)$$

**exemple** : données sur le design d'emballage

$$L = 0.5 * (\mu_1 + \mu_2) - 0.5 * (\mu_3 + \mu_4)$$

3 couleurs vs 5 couleurs

$$\hat{L} = - 9.35 \quad \sum c_i^2 / n_i = 0.2125$$

$$s(\hat{L}) = 2.24$$

$$- 12.5 \leq L \leq - 6.2$$

### Procédures d'inférences simultanées (comparaisons multiples)

Les méthodes A – B – C ont deux limitations :

1. le coefficient de confiance  $1 - \alpha$  et le seuil  $\alpha$  d'un test s'applique à UN test seulement.
2. le test ou la comparaison n'a pas été suggéré par les données (« data snooping »).

La solution de ce problème est d'utiliser une procédure de comparaison multiple qui inclut toutes les inférences possibles qui peuvent être anticipées et d'intérêt après que les données furent examinées. Par exemple, on peut s'intéresser à toutes les comparaisons définies par les différences entre toutes les paires de moyennes. Il existe 3 procédures pour faire de l'inférence après avoir vu les données sans affecter le coefficient de confiance:

- § méthode de Tukey («HSD = Honest Significant Differences »)
- § méthode de Scheffé pour les contrastes
- § méthode de Bonferroni pour les comparaisons prédéfinies

#### Méthode de Tukey

La méthode est dédiée sur les comparaisons (contrastes spécifiques) définies par les différences entre toutes les moyennes prises 2 à 2 :

$$H_0 : \mu_i - \mu_j = 0 \quad \text{vs} \quad H_a : \mu_i - \mu_j \neq 0$$

Le test repose sur la distribution « Studentized Range » dont la définition suit.

$Y_1, Y_2, \dots, Y_g$  : g observations indépendantes d'une population  $N(\mu, \sigma^2)$

$W = \max(Y_1, Y_2, \dots, Y_g) - \min(Y_1, Y_2, \dots, Y_g)$  : étendue («range»)

$S^2$  : estimation de  $\sigma^2$  basée sur  $\nu$  degrés de liberté

$Q(g, \nu) = W / S$  : « studentized range »

Extrait du tableau complet du 95ième percentile de la distribution :  $q(0.95; g; \nu)$

	g : nombre de groupes		v : degrés de liberté			
v	g = 2	g = 3	g = 4	g = 5	g = 10	
2	6.08	8.33	9.80	10.9	14.0	
5	3.64	4.60	5.22	5.67	6.80	
10	3.15	3.88	4.33	4.65	5.60	
20	2.95	3.58	3.96	4.23	5.01	
40	2.86	3.44	3.79	4.04	4.73	
120	2.80	3.36	3.68	3.92	4.56	
infini	2.77	3.31	3.63	3.86	4.47	

**Méthode de Tukey**

$$D = \mu_i - \mu_j \quad \widehat{D} = \bar{Y}_{i\cdot} - \bar{Y}_{j\cdot}$$

$$s^2(\widehat{D}) = \text{MSE} * [(1/n_i) + (1/n_j)] \tag{38}$$

$$T = 0.707 * q(1 - \alpha, g, N - g) \tag{39}$$

Intervalle de confiance simultané de toutes les différences avec coeff. conf.  $1 - \alpha$

$$D : \widehat{D} \pm T * s(D) \tag{40}$$

**exemple** : données de design d'emballage

Tukey HSD test; variable Y-caisses vendues probabilities for Post Hoc Tests Error: Between MS = 10.547, df = 15.000					
	empaquetage	{1} 14.6	{2} 13.4	{3} 19.5	{4} 27.2
1	1		0.9354	0.1550	0.0003
2	2	0.9354		0.0584	0.0002
3	3	0.1550	0.0584		0.0143
4	4	0.0003	0.0002	0.0143	

**Méthode de Scheffé**

$$L = \sum c_i \mu_i \quad \sum c_i = 0$$

$$H_0 : L = 0 \text{ vs } H_a : L \neq 0$$

$$\widehat{L} = \sum c_i \bar{Y}_{i\cdot}$$

$$s(\widehat{L}) = \text{MSE}^{0.5} * [\sum c_i^2 / n_i]^{0.5}$$

$$S = (g - 1) * F(1 - \alpha, g - 1, N - g) \tag{41}$$

Intervalle de confiance simultané de tous les contrastes avec coefficient de conf.  $1 - \alpha$

$$L : \widehat{L} \pm S * s(\widehat{L}) \tag{42}$$

**exemple** : données de design d'emballage

Scheffé test; variable Y-caisses vendues probabilities for Post Hoc Tests Error: Between MS = 10.547, df = 15.000					
	empaquetage	{1}	{2}	{3}	{4}
1	1		0.9507	0.2125	0.0002
2	2	0.9507		0.0895	0.0001
3	3	0.2125	0.0895		0.0248
4	4	0.0002	0.0001	0.0248	



**Méthode de Bonferroni**

La famille d'intérêt comprend les comparaisons paires, les contrastes et toute combinaison linéaire quelconque. L'utilisateur doit spécifier la comparaison avant de faire l'analyse de la variance.

$$L : \hat{L} \pm B * s(\hat{L}) \tag{43}$$

$$B = t(v, N - g) \quad v = 1 - (\alpha / 2g) \tag{44}$$

**exemple** : données de design d'emballage

Bonferroni test; variable Y-caisses vendues probabilities for Post Hoc Tests Error: Between MS = 10.547, df = 15.000					
	empaquetage	{1}	{2}	{3}	{4}
1	1		1.0000	0.2397	0.0001
2	2	1.0000		0.0808	0.0000
3	3	0.2397	0.0808		0.0180
4	4	0.0001	0.0000	0.0180	

**Comparaison des méthodes**

- § Si on veut seulement faire des comparaisons entre les paires, la procédure de Tukey est supérieure et est recommandée.
- § Si le test F rejette l'égalité des moyennes alors il existe au moins un contraste qui diffère de zéro parmi tous les contrastes.
- § La procédure de Bonferroni est préférable à la procédure de Scheffé si le nombre de contrastes d'intérêt est à peu près le même que le nombre de modalités.
- § Il existe d'autres procédures pour des fonctions spécialisées. Par exemple, la procédure de Dunnett pour comparer chaque traitement vis-à-vis un contrôle ;
- § procédure de Hsu : choisir le « meilleur » traitement.

**ANOM : Analysis Of Means (Ott)**

C'est une méthode alternative au test F. Elle est basée sur l'ensemble des tests de l'effet différentiel de chaque modalité. La méthode a aussi l'avantage d'une représentation graphique semblable à une carte Xbar de Shewhart. On fait plusieurs tests en simultanément :

$$H_{0i} : \tau_i = 0 \quad \text{vs} \quad H_a : \tau_i \neq 0 \quad i = 1, 2, \dots, g$$

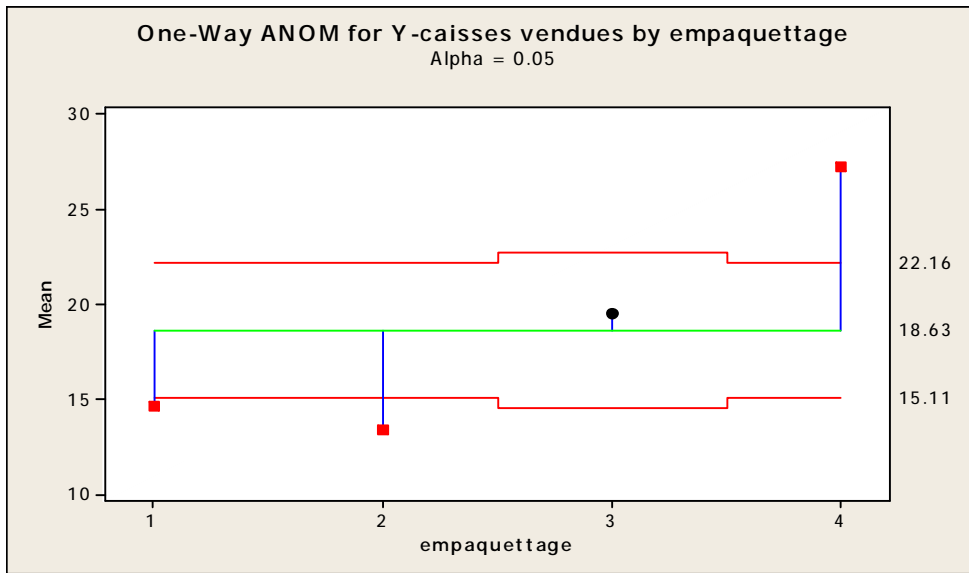
$$\hat{\tau}_i = \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..} \tag{45}$$

$$s^2(\hat{\tau}_i) = MSE [ ((g-1) / g)^2 * (1 / n_i) + (1 / g^2) * (\sum_{h \neq i} (1 / n_h)) ] \tag{46}$$

ANOM : test des moyennes vs la grande moyenne

ANOVA : test si les moyennes sont différentes

**exemple : données de design d'emballage (graphique : MINITAB)**



**Analyse de variance si le facteur est quantitatif**

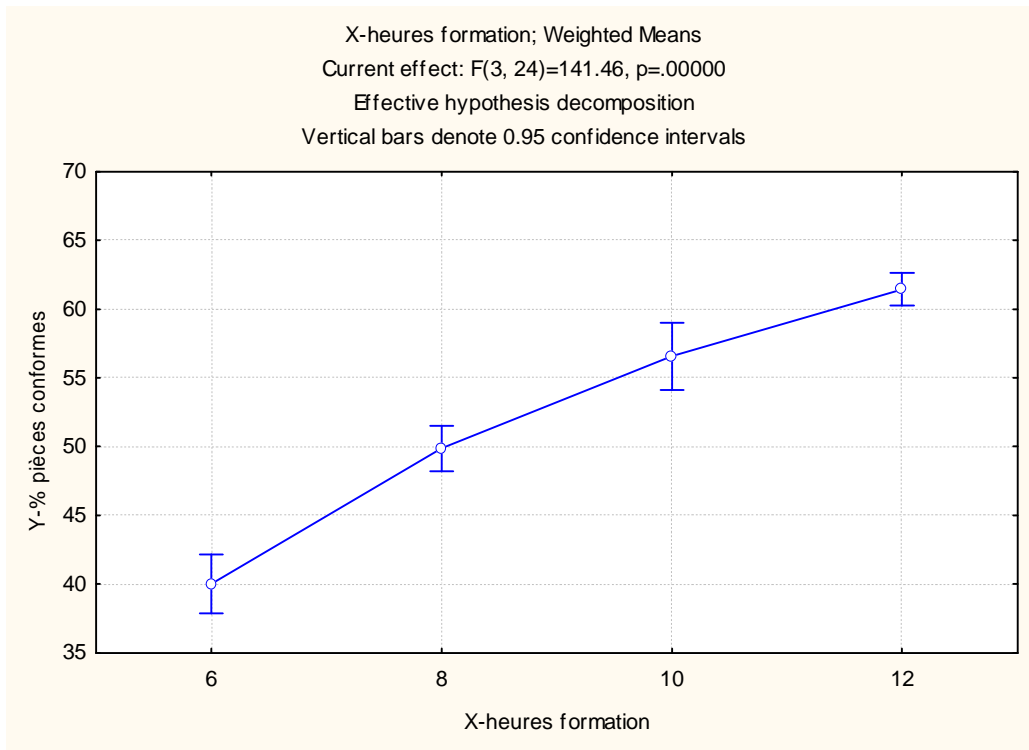
**Exemple 6 : pourcentage de pièces produites conformes VS heures de formation**

	X-heures formation	Y-% pièces conformes
1	6	40
2	6	39
3	6	39
4	6	36
5	6	42
6	6	43
7	6	41
8	8	53
9	8	48
10	8	49
11	8	50
12	8	51
13	8	50
14	8	48

15	10	53
16	10	58
17	10	56
18	10	59
19	10	53
20	10	59
21	10	58
22	12	63
23	12	62
24	12	59
25	12	61
26	12	62
27	12	62
28	12	61

**On peut faire plus qu'une comparaison de l'influence du facteur : on peut développer une équation de prédiction.**

**Première analyse : modèle d'analyse de variance**



ANOVA					
	df	SS	MS	Ratio F	p-value
<b>Intercept</b>	<b>1</b>	<b>75608.04</b>	<b>75608.04</b>	<b>17740.43</b>	<b>0.000000</b>
<b>X-heures formation</b>	<b>3</b>	<b>1808.68</b>	<b>602.89</b>	<b>141.46</b>	<b>0.000000</b>
<b>Error</b>	<b>24</b>	<b>102.29</b>	<b>4.26</b>		
<b>Total</b>	<b>27</b>	<b>1910.96</b>			

Tukey HSD test; variable Y-% pièces conformes					
Approximate Probabilities for Post Hoc Tests Error:					
Between MS = 4.2619, df = 24.000					
	X-heures formation	{1}	{2}	{3}	{4}
<b>1</b>	<b>6</b>		<b>0.0002</b>	<b>0.0002</b>	<b>0.0002</b>
<b>2</b>	<b>8</b>	<b>0.0002</b>		<b>0.0002</b>	<b>0.0002</b>
<b>3</b>	<b>10</b>	<b>0.0002</b>	<b>0.0002</b>		<b>0.0012</b>
<b>4</b>	<b>12</b>	<b>0.0002</b>	<b>0.0002</b>	<b>0.0012</b>	

**Première analyse : modèle de régression**

**M1** modèle de prédiction d'ordre 1 :  $Y = b_0 + b_1 * X$

Regression Summary for Dependent Variable: Y-% pièces conformes						
R= .961 R <sup>2</sup> = .923 <b>Adjusted R<sup>2</sup>= .920</b> F(1,26)=312.88 p						
	Beta	Std.Err.	B	Std.Err.	t(26)	p-level
Intercept			20.014	1.8612	10.754	<b>0.0000</b>
X-heures formation	0.9609	0.0543	3.550	0.2007	17.688	<b>0.0000</b>

Analysis of Variance; DV: Y-% pièces conformes					
	SS	df	MS	F	p-level
Regress.	1764.35	1	1764.35	312.88	<b>0.0000</b>
Residual	146.61	26	5.64		
Total	1910.96				

**M2** modèle de prédiction d'ordre 2 :  $Y = b_0 + b_1 * X + b_2 * X^2$

Regression Summary for Dependent Variable: Y-% pièces conformes						
R= .973 R <sup>2</sup> = .946 <b>Adjusted R<sup>2</sup>= .942</b> F(2,25)=219.72 p						
	Beta	Std.Err.	B	Std.Err.	t(25)	p-level
Intercept			-3.736	7.4549	-0.501	0.6207
X-heures formation	2.483	0.4692	9.175	1.7335	5.293	<b>0.0000</b>
X**2	-1.530	0.4692	-0.312	0.0958	-3.261	<b>0.0032</b>

Analysis of Variance; DV: Y-% pièces conformes					
	SS	df	MS	F	p-level
Regress.	1808.10	2	904.050	219.72	<b>0.0000</b>
Residual	102.86	25	4.115		
Total	1910.96				

## 7. DIAGNOSTICS ET MESURES CORRECTIVES

§ **Diagnostic** : écarts importants par rapport aux hypothèses de base ?

§ Si oui, qu'elles sont les mesures correctives ?

L'analyse diagnostique est basée sur les graphiques des résidus.

4 types de résidus :

$$(47) \quad e_{ij} = Y_{ij} - \bar{Y}_{ij} = Y_{ij} - \bar{Y}_i \quad \text{résidu}$$

$$(48) \quad e_{ij}^* = e_{ij} / \text{MSE}^{0.5} \quad \text{résidu semi studentisé}$$

$$(49) \quad r_{ij} = e_{ij}^* / [(n_i - 1) / n_i]^{0.5} \quad \text{résidu studentisé}$$

$$(50) \quad t_{ij} = e_{ij}^* [(N - g - 1) / (\text{SSE} [1 - (1/n_i)] - e_{ij}^2)]^{0.5}$$

résidu studentisé supprimé

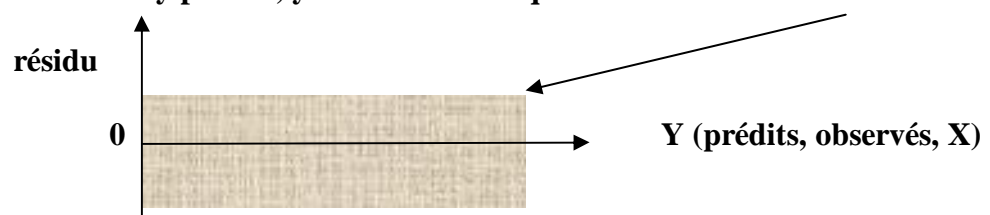
résidu studentisé avec observation supprimée

Les écarts du modèle d'ANOVA sont :

1. variance non constante
2. erreurs non indépendantes
3. valeurs aberrantes
4. normalité du terme d'erreur
5. omission de variables explicatives importantes

HYPOTHÈSES	VÉRIFICATION	DIAGNOSTIC
variance non constante	graphique de résidus studentisés VS valeurs prédites	- bande horizontale - tests : Hartley, Brown-Forsythe
non indépendance	SI l'ordre temporel est connu	- résidus VS temps - test d'indépendance sérielle
valeurs aberrantes	$t_{ij}$ VS valeurs prédites	-
normalité	résidus sur échelle de probabilité gaussienne	écart par rapport à la droite-
omission	résidus VS valeurs prédites	résidus corrélés avec autres facteurs non tenu en compte

graphique des résidus avec  $\hat{y}$  prédits,  $y$  observés et chaque facteur X : bande horizontale

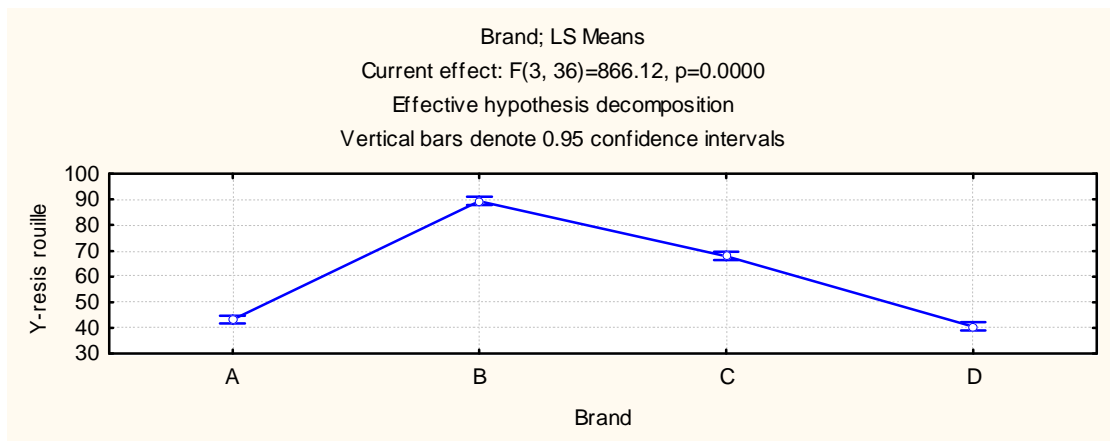


**Exemple 7 : inhibiteur de rouille**

**Kutner et all - 5 ed p. 735**

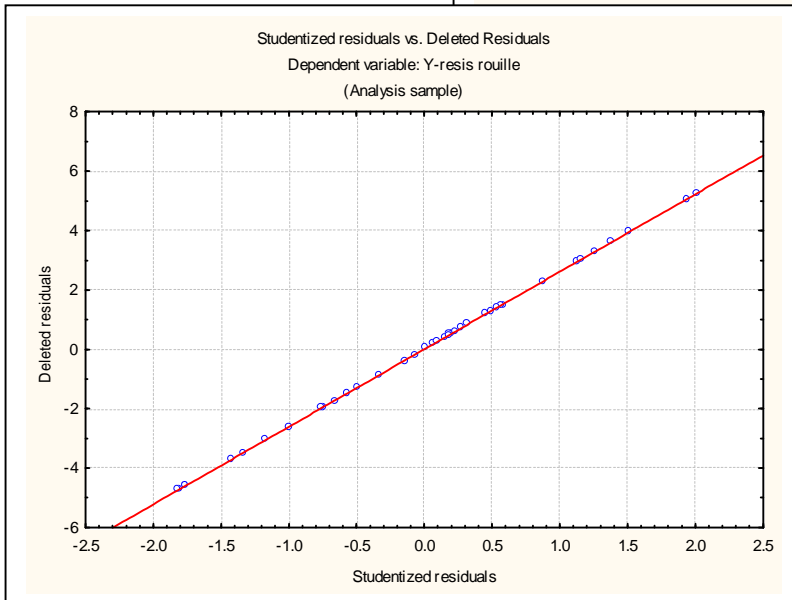
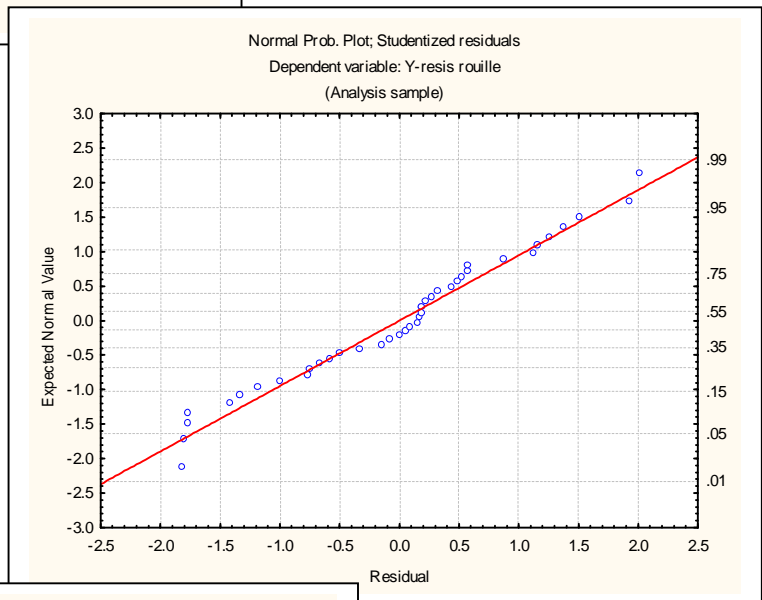
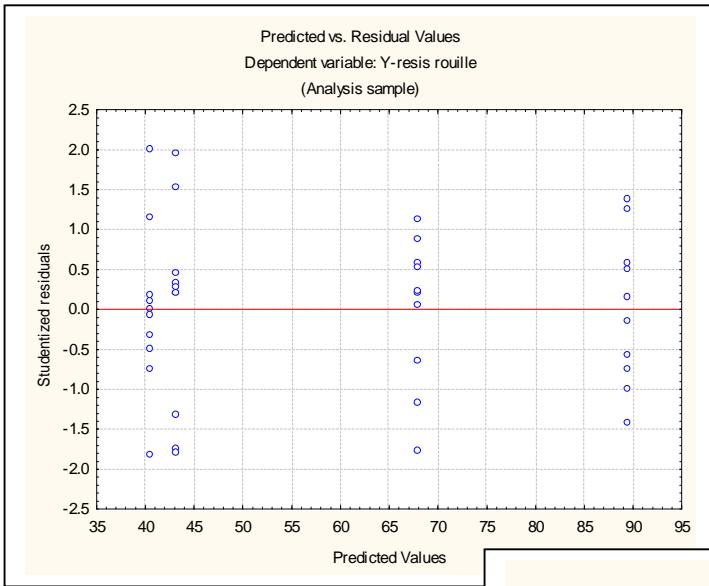
id	Brand	rep	Y-resis rouille
1	A	1	43.9
2	A	2	39.0
3	A	3	46.7
4	A	4	43.8
5	A	5	44.2
6	A	6	47.7
7	A	7	43.6
8	A	8	38.9
9	A	9	43.6
10	A	10	40.0
11	B	1	89.8
12	B	2	87.1
13	B	3	92.7
14	B	4	90.6
15	B	5	87.7
16	B	6	92.4
17	B	7	86.1
18	B	8	88.1
19	B	9	90.8
20	B	10	89.1

	Brand	rep	Y-resis rouille
21	C	1	68.4
22	C	2	69.3
23	C	3	68.5
24	C	4	66.4
25	C	5	70.0
26	C	6	68.1
27	C	7	70.6
28	C	8	65.2
29	C	9	63.8
30	C	10	69.2
31	D	1	36.2
32	D	2	45.2
33	D	3	40.7
34	D	4	40.5
35	D	5	39.3
36	D	6	40.3
37	D	7	43.2
38	D	8	38.7
39	D	9	40.9
40	D	10	39.7



	DF	SS	MS	F	p
Intercept	1	145202.5	145202.5	23649.26	0.00
Brand	3	15953.5	5317.8	866.12	0.00
Error	36	221.0	6.1		
Total	39	16174.5			

Tableau des résidus - MSE = 6.1 basée sur 36 degrés de liberté						
	Y-résis observé	Y prédit	résidu brut (e)	résidu semi (e*)	résidu studentisé (r)	résidu studentisé supprimé (t)
1	43.90	43.14	0.76	0.308	0.323	0.319
2	39.00	43.14	-4.14	-1.676	-1.761	-1.817
3	46.70	43.14	3.56	1.441	1.514	1.543
4	43.80	43.14	0.66	0.267	0.281	0.277
5	44.20	43.14	1.06	0.429	0.451	0.446
6	47.70	43.14	4.56	1.846	1.940	2.021
7	43.60	43.14	0.46	0.186	0.196	0.193
8	38.90	43.14	-4.24	-1.717	-1.804	-1.865
9	43.60	43.14	0.46	0.186	0.196	0.193
10	40.00	43.14	-3.14	-1.271	-1.336	-1.351
11	89.80	89.44	0.36	0.146	0.153	0.151
12	87.10	89.44	-2.34	-0.947	-0.995	-0.995
13	92.70	89.44	3.26	1.320	1.387	1.406
14	90.60	89.44	1.16	0.470	0.493	0.488
15	87.70	89.44	-1.74	-0.704	-0.740	-0.736
16	92.40	89.44	2.96	1.198	1.259	1.270
17	86.10	89.44	-3.34	-1.352	-1.421	-1.442
18	88.10	89.44	-1.34	-0.543	-0.570	-0.565
19	90.80	89.44	1.36	0.551	0.579	0.573
20	89.10	89.44	-0.34	-0.138	-0.145	-0.143
21	68.40	67.95	0.45	0.182	0.191	0.189
22	69.30	67.95	1.35	0.547	0.574	0.569
23	68.50	67.95	0.55	0.223	0.234	0.231
24	66.40	67.95	-1.55	-0.628	-0.659	-0.654
25	70.00	67.95	2.05	0.830	0.872	0.869
26	68.10	67.95	0.15	0.061	0.064	0.063
27	70.60	67.95	2.65	1.073	1.127	1.132
28	65.20	67.95	-2.75	-1.113	-1.170	-1.176
29	63.80	67.95	-4.15	-1.680	-1.765	-1.822
30	69.20	67.95	1.25	0.506	0.532	0.526
31	36.20	40.47	-4.27	-1.729	-1.816	-1.879
32	45.20	40.47	4.73	1.915	2.012	2.106
33	40.70	40.47	0.23	0.093	0.098	0.096
34	40.50	40.47	0.03	0.012	0.013	0.013
35	39.30	40.47	-1.17	-0.474	-0.498	-0.492
36	40.30	40.47	-0.17	-0.069	-0.072	-0.071
37	43.20	40.47	2.73	1.105	1.161	1.167
38	38.70	40.47	-1.77	-0.717	-0.753	-0.748
39	40.90	40.47	0.43	0.174	0.183	0.180
40	39.70	40.47	-0.77	-0.312	-0.328	-0.323





**Homogénéité de la variance****Test de Hartley**exigence :  $n_i = n$  + normalité

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_g^2 \quad (51)$$

$$H_a : \text{les variances ne sont pas toutes égales} \quad (52)$$

$$H = \max(s_i^2) / \min(s_i^2) \quad (53)$$

$$\text{Rejet de } H_0 \text{ si } H > H(1-\alpha, g, n-1) \quad (54)$$

 $H(1-\alpha, g, df) : (1 - \alpha) \text{ percentile distribution de } H$ 
**Exemple 7 : inhibiteur de rouille**

marque	# obs	moyenne	écart type	variance
tous	40	60.25	20.36	414.53
A	10	43.14	3.00	9.00
B	10	89.44	2.22	4.93
C	10	67.95	2.17	4.71
D	10	40.47	2.44	5.95

$$H = 9.00 / 4.71 = 1.91 \quad : \text{ on ne rejette pas } H_0 \text{ car } p = 0.7532$$

Tests of Homogeneity of Variances					
	Hartley	Cochran	Bartlett	df	p
Y-resis rouille	1.91	0.366	1.199	3	0.7532

**Test de Brown-Forsythe**  $n_i$  peuvent être inégaux + robuste à la non normalité

$$d_{ij} = |y_{ij} - \text{med}(y_{ij})| \quad \text{med}(y) = \text{médiane}(y) \quad (55)$$

$$F_{BF} = MS_{TR} / MSE \quad (56)$$

$$MS_{TR} = \sum n_i * (\bar{d}_{i.} - \bar{d}_{..})^2 / (g - 1) \quad (57)$$

$$MSE = \sum \sum (d_{ij} - \bar{d}_{i.})^2 / (N - g) \quad (58)$$

$$\bar{d}_{i.} = \sum d_{ij} / n_i \quad \bar{d}_{..} = \sum \sum d_{ij} / N \quad (59)$$

 $F_{BF}$  suit approximativement loi  $F(g - 1, N - g)$ 

 On rejette  $H_0$  si  $F_{BF} > F(1 - \alpha, g - 1, N - g)$

**Test de Cochran**  $n_i = n$  (égaux)

$$C = \max (s_i^2) / \sum s_i^2 \quad (60)$$

loi d'échantillonnage de C dépend de g et de n  
on rejette  $H_0$  si  $C > C(1 - \alpha ; n, g)$

tableau des percentiles  $C(1 - \alpha ; n, g)$  : distribution de C

n	percentile $1 - \alpha$	g = 2	g = 3	g = 4	g = 5	g = 8	g = 10
2	0.95	0.9985	0.9669	0.9065	0.8412	0.6798	0.6020
	0.99	0.9999	0.9933	0.9676	0.9279	0.7945	0.7175
3	0.95	0.9750	0.8709	0.7679	0.6838	0.5157	0.4450
	0.99	0.9950	0.9423	0.8643	0.7885	0.6152	0.5358
4	0.95	0.9392	0.7977	0.6841	0.5981	0.4377	0.3733
	0.99	0.9794	0.8831	0.7814	0.6957	0.5209	0.4469
5	0.95	0.9057	0.7457	0.6287	0.5441	0.3910	0.3311
	0.99	0.9586	0.8335	0.7212	0.6329	0.4627	0.3934
6	0.95	0.8772	0.7071	0.5895	0.5065	0.3595	0.3029
	0.99	0.9373	0.7933	0.6761	0.5875	0.4226	0.3572
8	0.95	0.8332	0.6530	0.5365	0.4564	0.3185	0.2666
	0.99	0.8988	0.7335	0.6129	0.5229	0.3704	0.3106
10	0.95	0.8010	0.6167	0.5017	0.4387	0.2926	0.2439
	0.99	0.8674	0.6912	0.5702	0.5037	0.3373	0.2813
17	0.95	0.7341	0.5466	0.4366	0.3645	0.2462	0.2032
	0.99	0.7949	0.6059	0.4884	0.4094	0.2779	0.2297
37	0.95	0.6602	0.4748	0.3720	0.3066	0.2022	0.1655
	0.99	0.7067	0.5153	0.4057	0.3351	0.2214	0.1811

Statistical Principles in Experimental Design, 2 ed., B.J. Winer, 1971, Mc Graw-Hill, p. 876

**Test de Bartlett** les  $n_i$  peuvent être inégaux

$$B = (2.303/c) * [(N - g) * \log(\text{MSE}) - \sum (n_i - 1) * \log(s_i^2)] \quad (61)$$

$$c = 1 + (1/3 * (g - 1)) * [\sum (1/(n_i - 1)) - (1/N)] \quad (62)$$

B suit approximativement loi khi-deux avec  $(g - 1)$  degrés de liberté  
On rejette  $H_0$  si  $B > \chi^2(1 - \alpha ; g - 1)$

**Exemple 8 : données de flux – soudure de composants électroniques**

**Kutner et all - 5 ed. p. 783**

id	type flux	rep	Y-force soudure
1	A	1	14.87
2	A	2	16.81
3	A	3	15.83
4	A	4	15.47
5	A	5	13.60
6	A	6	14.76
7	A	7	17.40
8	A	8	14.62
9	B	1	18.43
10	B	2	18.76
11	B	3	20.12
12	B	4	19.11
13	B	5	19.81
14	B	6	18.43
15	B	7	17.16
16	B	8	16.40
17	C	1	16.95
18	C	2	12.28
19	C	3	12.00
20	C	4	13.18

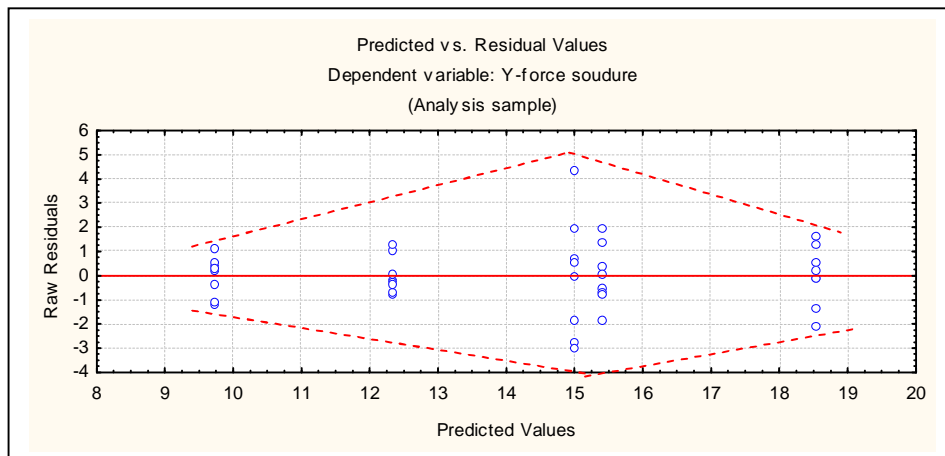
id	type flux	rep	Y-force soudure
21	C	5	14.99
22	C	6	15.76
23	C	7	19.35
24	C	8	15.52
25	D	1	8.59
26	D	2	10.90
27	D	3	8.60
28	D	4	10.13
29	D	5	10.28
30	D	6	9.98
31	D	7	9.41
32	D	8	10.04
33	E	1	11.55
34	E	2	13.36
35	E	3	13.64
36	E	4	12.16
37	E	5	11.62
38	E	6	12.39
39	E	7	12.05
40	E	8	11.95

flux	# obs	moyenne	variance
tous	40	14.21	10.96
A	8	15.42	1.531
B	8	18.53	1.570
C	8	15.00	6.185
D	8	9.74	0.667
E	8	12.34	0.592

**homogénéité des variances**

Hartley	Cochran	Bartlett	df	p
10.445	0.5865	12.985	4	0.0113

$F_{BF} = 2.94 > F(0.95, 4, 35) = 2.64$



## Mesures correctives

VARIANCES	NORMALITÉ	MESURE CORRECTIVE
hétérogènes	oui	régression pondérée
hétérogènes	non	transformation de Box-Cox
« gros » écarts	« gros » écarts	ANOVA non paramétrique Kruskall-Wallis

**Exemple 8 : suite** données de flux

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \quad \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_i^2) \quad (60)$$

ponds  $w$        $w_{ij} = 1/s_i^2$       (61)

on remplace l'ANOVA par un modèle de régression avec des variables indicatrices et on fait l'ajustement de moindres carrés pondérés avec les poids  $w$

modèle complet (F) :       $Y_{ij} = \mu_1 X_{ij1} + \mu_2 X_{ij2} + \dots + \mu_g X_{ijg}$       (62)

$$X_{ijt} = \begin{cases} 1 & \text{si le cas provient du niveau } i \text{ du facteur} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

modèle réduit (R) :       $Y_{ij} = \mu X_{ij1} + \mu X_{ij2} + \dots + \mu X_{ijg}$       (63)

sous  $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_g = \mu$

SSE  $w$  (R) : somme de carrés erreur modèle réduit R      (64)

SSE  $w$  (F) : somme de carrés erreur modèle complet F      (65)

$$F_w = [(SSE_w(R) - SSE_w(F)) / SSE_w(F)] * (N - g) / (g - 1) \quad (66)$$

suit approximativement loi  $F(g - 1, N - g)$

on rejette  $H_0$  si  $F_w > F(1 - \alpha, g - 1, N - g)$

groupe	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
$w_{ij}$	0.653	0.637	0.162	1.449	1.689

id	flux	rep	indA	indB	indC	indD	indE	Gen	poids	Y-soudure
1	A	1	1	0	0	0	0	1	0.653	14.87
2	A	2	1	0	0	0	0	1	0.653	16.81
3	A	3	1	0	0	0	0	1	0.653	15.83
4	A	4	1	0	0	0	0	1	0.653	15.47
5	A	5	1	0	0	0	0	1	0.653	13.60
6	A	6	1	0	0	0	0	1	0.653	14.76
7	A	7	1	0	0	0	0	1	0.653	17.40
8	A	8	1	0	0	0	0	1	0.653	14.62
9	B	1	0	1	0	0	0	1	0.637	18.43
10	B	2	0	1	0	0	0	1	0.637	18.76
11	B	3	0	1	0	0	0	1	0.637	20.12
12	B	4	0	1	0	0	0	1	0.637	19.11
13	B	5	0	1	0	0	0	1	0.637	19.81
14	B	6	0	1	0	0	0	1	0.637	18.43
15	B	7	0	1	0	0	0	1	0.637	17.16
16	B	8	0	1	0	0	0	1	0.637	16.40
17	C	1	0	0	1	0	0	1	0.162	16.95
18	C	2	0	0	1	0	0	1	0.162	12.28
19	C	3	0	0	1	0	0	1	0.162	12.00
20	C	4	0	0	1	0	0	1	0.162	13.18
21	C	5	0	0	1	0	0	1	0.162	14.99
22	C	6	0	0	1	0	0	1	0.162	15.76
23	C	7	0	0	1	0	0	1	0.162	19.35
24	C	8	0	0	1	0	0	1	0.162	15.52
25	D	1	0	0	0	1	0	1	1.499	8.59
26	D	2	0	0	0	1	0	1	1.499	10.90
27	D	3	0	0	0	1	0	1	1.499	8.60
28	D	4	0	0	0	1	0	1	1.499	10.13
29	D	5	0	0	0	1	0	1	1.499	10.28
30	D	6	0	0	0	1	0	1	1.499	9.98
31	D	7	0	0	0	1	0	1	1.499	9.41
32	D	8	0	0	0	1	0	1	1.499	10.04
33	E	1	0	0	0	0	1	1	1.689	11.55
34	E	2	0	0	0	0	1	1	1.689	13.36
35	E	3	0	0	0	0	1	1	1.689	13.64
36	E	4	0	0	0	0	1	1	1.689	12.16
37	E	5	0	0	0	0	1	1	1.689	11.62
38	E	6	0	0	0	0	1	1	1.689	12.39
39	E	7	0	0	0	0	1	1	1.689	12.05
40	E	8	0	0	0	0	1	1	1.689	11.95

modèle complet (F) :  $\hat{Y} = 15.4 * \text{indA} + 18.5 * \text{indB} + 15.0 * \text{indC} + 9.7 * \text{indD} + 12.3 * \text{indE}$

$SSEw(F) = 35.0$

avec 35 degrés de liberté

modèle réduit (R) :  $\hat{Y} = 12.88 * \text{gen}$

$SSw ( R) = 359.2$

avec 39 degrés de liberté

$F^*w = (359.2 - 25.0) / 35 * (35 / (39 - 35)) = 81.05$

$F^*w > F (0.99, 4, 35) = 3.91$       rejet de  $H_0$

**Transformations de la variable de réponse : cas de variances inégales**

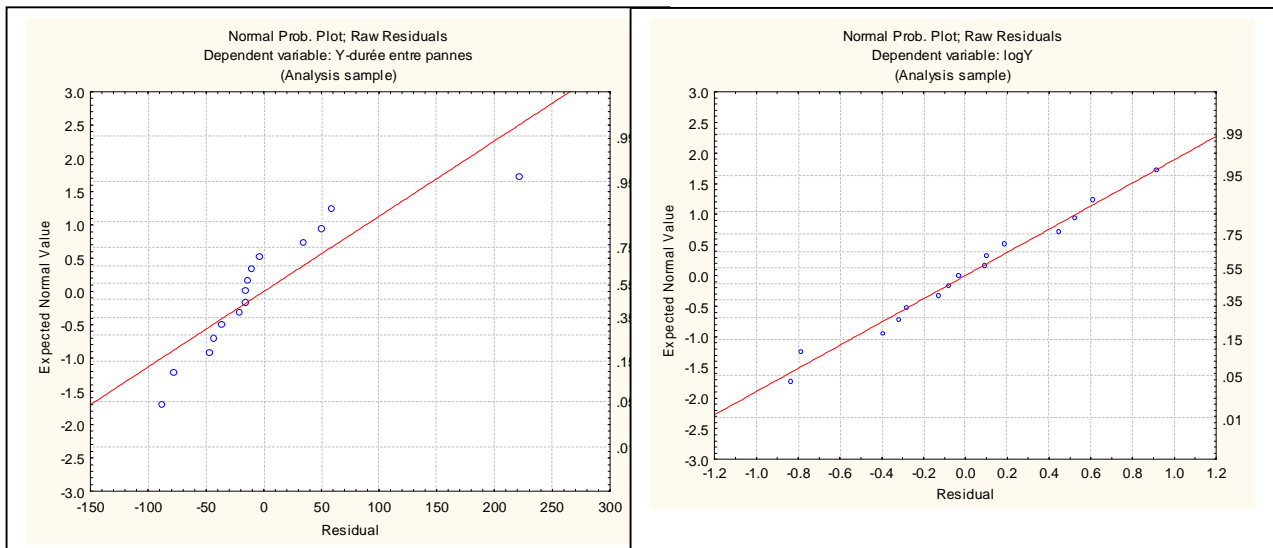
CONDITION	TRANSFORMATION
variance proportionnelle à la moyenne exemple. : distribution Poisson	$Y' = \sqrt{Y}$ ou $Y' = \sqrt{Y} + \sqrt{Y + 1}$
écart type proportionnel à la moyenne	$Y' = \log(Y)$
écart type proportionnel à la (moyenne) <sup>2</sup>	$Y' = 1 / Y$
réponse Y est une proportion	$Y' = 2 \arcsin(\sqrt{Y})$

**Recommandation** : examiner les quantités  $s_i^2 / \bar{Y}_{i.}$  -  $s_i / \bar{Y}_{i.}$  -  $s_i / \bar{Y}_{i.}^2$   
pour chaque niveau du facteur et choisir la plus constante

**Exemple 9** : temps entre les pannes d'ordinateur dans trois villes

ville	obs	m -moyenne	s -écart type	$s^2 / m$	$s / m$	$s / moy^2$
A	5	50.37	42.29	35.51	0.84	0.017
B	5	22.13	33.22	49.86	1.50	0.068
C	5	121.21	127.15	133.39	1.05	0.009

**choix : transformation logarithmique**

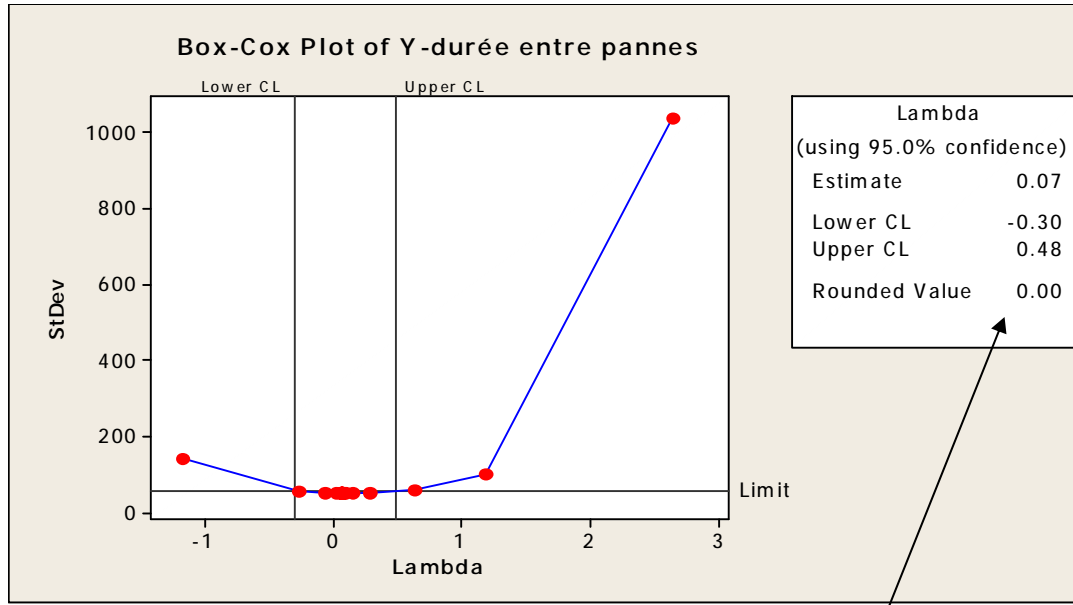


**Transformation de Box-Cox**

$$Y' = Y^\lambda \quad -2 < \lambda < 2 \quad (67)$$

$\lambda = ?$  on choisit  $\lambda$  tel que  $SSE(\lambda)$  soit minimum  
on prend un valeur arrondie

si  $\lambda = 0$   $Y' = \log(Y)$

**Exemple 9 : suite** (Minitab)

**transformation logarithmique**

**Importance des écarts d'hypothèses de base sur le modèle d'ANOVA**

- Normalité** : le manque de normalité n'est pas très important pour le cas à effet fixes. Pour le cas à effets aléatoires, les conséquences sont plus importantes.
- Variances inégales** : le test F est robuste si les tailles ni ne sont pas trop inégales.
- Indépendance** : conséquences importantes pour l'inférence. Par exemple une forte auto corrélation dans les valeurs de la réponse Y, a comme une conséquence pratique que les tailles sont plus faibles en réalité qu'elles le paraissent, rendant ainsi plus difficile la détection des différences significatives. Les mesures répétées sur une même unité d'observation (ou expérimentale) constitue un cas fréquent de dépendance. Il est important de savoir reconnaître cette situation lorsqu'elle est présente dans la structure des données et de faire une analyse appropriée.

**ANOVA non paramétrique : test de Kruskal-Wallis**

Si on ne peut pas transformer la variable de réponse afin d'avoir une distribution qui s'approche de la normale, on peut faire un test non paramétrique qui ne dépend pas de la forme de la distribution. Les méthodes paramétriques sont basées sur les rangs de la variable de réponse plutôt que les valeurs observées. Dans le cas de l'ANOVA, la procédure porte le nom de Kruskal-Wallis.

**Procédure :** on range dans l'ordre croissant de 1 à N toutes les observations de la réponse Y. Les valeurs  $Y_{ij}$  génèrent les rangs  $R_{ij}$ . On procède comme dans le test usuel F avec les rangs  $R_{ij}$  plutôt qu'avec les  $Y_{ij}$ .

Test est basé sur  $F_{KW} = MSTR / MSE$  (68)

$$MSTR = \sum n_i (\bar{R}_{i.} - \bar{R}_{..})^2 / (g - 1) \quad (69)$$

$$MSE = \sum \sum (R_{ij} - \bar{R}_{i.})^2 / (N - g) \quad (70)$$

$$\bar{R}_{i.} = \sum R_{ij} / n_i \quad (71)$$

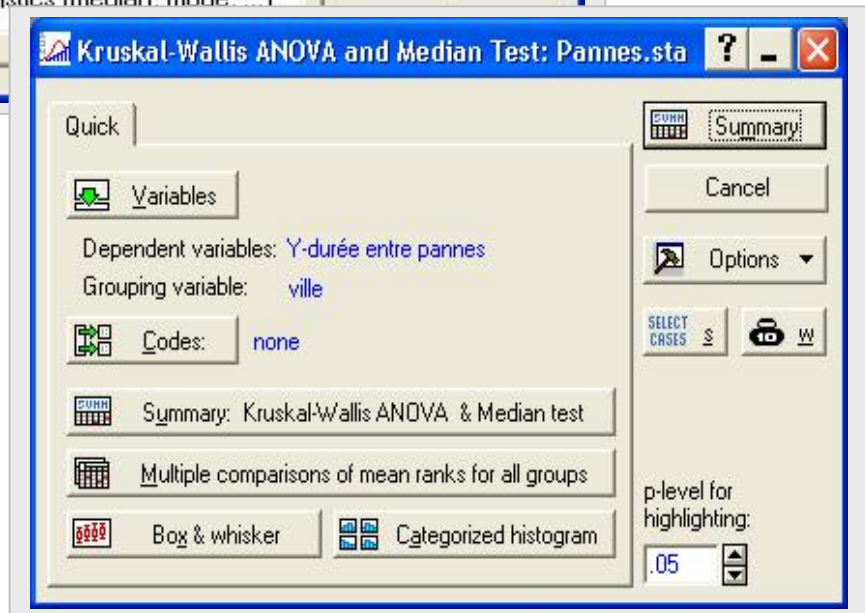
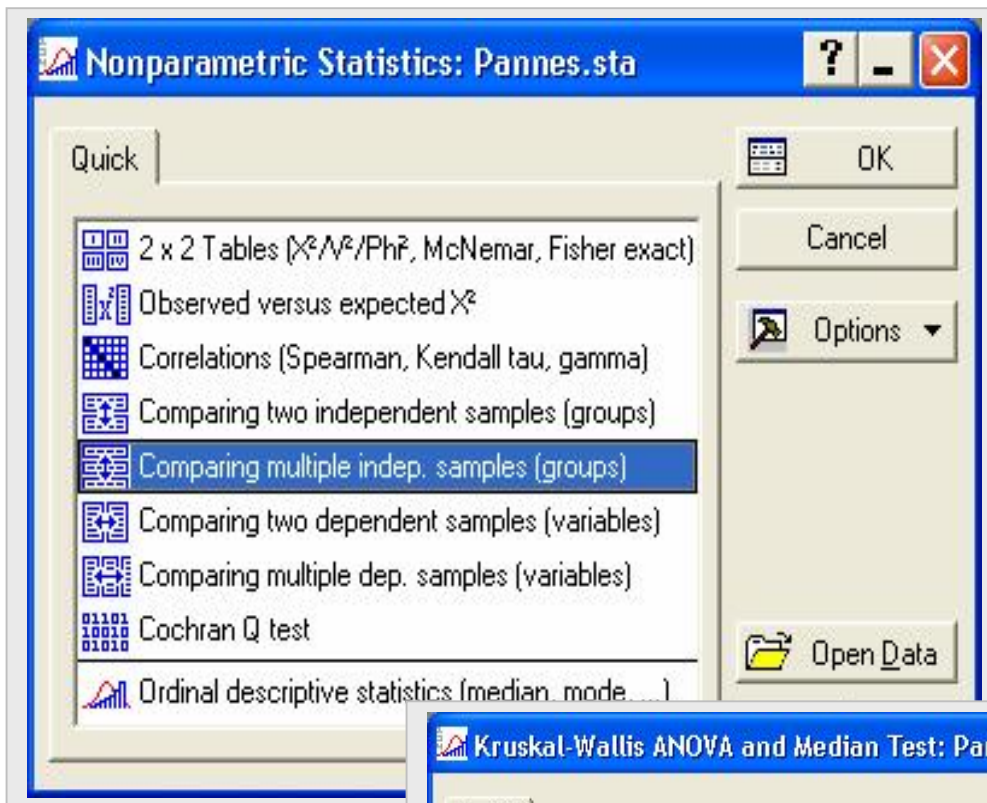
$$\bar{R}_{..} = \sum \sum R_{ij} / N = (N + 1) / 2 \quad (72)$$

**Exemple 9 : suite** durées des pannes

	ville	intervalle	Y-durée entre pannes	Y-Rang	logY
1	A	1	4.41	2	0.644
2	A	2	100.65	13	2.003
3	A	3	14.45	6	1.160
4	A	4	47.13	9	1.673
5	A	5	85.21	12	1.930
6	B	1	8.24	4	0.916
7	B	2	81.16	11	1.909
8	B	3	7.35	3	0.866
9	B	4	12.29	5	1.090
10	B	5	1.61	1	0.207
11	C	1	106.19	14	2.026
12	C	2	33.83	7	1.529
13	C	3	78.88	10	1.897
14	C	4	342.81	15	2.535
15	C	5	44.33	8	1.647



**Analyse non paramétrique avec Statistica**



Test F basé sur les rangs					
	SS	DF	MS	F	p
Intercept	960.00	1	960.00	61.02	0.0000
ville	91.20	2	45.60	2.90	0.0940
Error	188.80	12	15.73		

**H<sub>0</sub> rejetée au seuil alpha = 0.10**

## 8. ANOVA avec 2 facteurs fixes

Eléments de définition du plan et de l'analyse :

- § tailles échantillonales dans les cellules  $n_{ij}$  : égales, inégales, = 1 ;
- § facteurs : qualitatifs, quantitatifs, fixes, aléatoires, type bloc (secondaire)  
croisés, emboîtés (hiérarchie);
- § design / modèles : complètement aléatoire (CA), à bloc complet (RCBD), à effets fixes,  
à effets aléatoires, mixtes, analyse de covariance ANCOVA,

EXEMPLE	FACTEURS	DOMAINE	RÉPONSE	COMMENTAIRE
publicité	A : média B : prix	A : radio, journal B : 55 -60 - 65	Y -volume ventes	CA facteurs fixes
médecine	A : traitement B : genre	A : nouveau, placebo B : homme, femme	Y- tension artérielle	CA A : facteur fixe B : facteur aléatoire
bois traité	A : solution B : concentration	A : CCA, organique B : 0.25- 0.80-2.50	Y- test à la rupture	CA facteurs fixes
vente produit alimentaire	A : hauteur tablette B : largeur tablette	A : bas-milieu-haut B : régulière- large	Y-volume ventes	CA facteurs fixes
méthode d'enseignement	A : méthode B =X= moy cumul	A : M - D X : varie entre 2 et 4 (mesuré)	Y - taux de réussite cours	observationnelle analyse de covariance : ANCOVA

**CAS : 2 facteurs A, B fixes      A : niveaux  $i = 1, 2, \dots, a$       B : niveaux  $j = 1, 2, \dots, b$**

$Y_{ijk}$  k-ième répétition réponse Y de chaque combinaison (cellule) (i, j)  
 $k = 1, 2, \dots, n_{ij} = n > 1$        $N = n a b$  : nombre total d'observations  
 assignation au hasard (sans restriction) des traitements aux unités d'observation  
 (expérimentales)

**Autre cas :**  $n_{ij} = n = 1$  et  $n_{ij} > 0$  et variables

Modèle de type MOYENNES DES CELLULES

$$Y_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (73)$$

$$\mu_{ij} : \text{paramètres} \quad \varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$$

$$i = 1, 2, \dots, a \quad j = 1, 2, \dots, b \quad k = 1, 2, \dots, n_{ij} = n$$

$$Y_{ijk} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2)$$

Écriture matricielle : exemple avec  $a = b = n = 2$

$y_{111}$
$y_{112}$
$y_{121}$
$y_{122}$
$y_{211}$
$y_{212}$
$y_{221}$
$y_{222}$

1	0	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	1	0
0	0	0	1
0	0	0	1

$\mu_{11}$
$\mu_{12}$
$\mu_{21}$
$\mu_{22}$

$\epsilon_{111}$
$\epsilon_{112}$
$\epsilon_{121}$
$\epsilon_{122}$
$\epsilon_{211}$
$\epsilon_{212}$
$\epsilon_{221}$
$\epsilon_{222}$

$$Y = X \mu + \epsilon \tag{74}$$

**Modèle de type EFFETS**

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk} \tag{75}$$

$$\mu_{..} = \sum \sum \mu_{ij} / ab \tag{76}$$

$$\mu_{i.} = \sum \mu_{ij} / b \quad \mu_{.j} = \sum \mu_{ij} / a \tag{77}$$

$$\alpha_i = \mu_{i.} - \mu_{..} \quad \sum_i \alpha_i = 0 \tag{78}$$

$$\beta_j = \mu_{.j} - \mu_{..} \quad \sum_j \beta_j = 0 \tag{79}$$

$$(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu_{..} = \mu_{ij} - (\mu_{..} + \alpha_i + \beta_j) \tag{80}$$

$$\sum_j (\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad \sum_i (\alpha\beta)_{ij} = 0 \tag{81}$$

$$Y_{ijk} \sim N(\mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}, \sigma^2)$$

**Ajustement du modèle : modèle à moyennes de cellules**

minimum  $Q = \sum \sum (Y_{ijk} - \mu_{ij})^2$  principes des moindres carrés

solution:  $\hat{\mu}_{ij} = \bar{Y}_{ij.}$  et  $\widehat{Y}_{ijk} = \bar{Y}_{ij.}$  (82)

résidu :  $e_{ijk} = Y_{ijk} - \widehat{Y}_{ijk} = Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.}$  (83)

**Ajustement du modèle : modèle à effets**

minimum  $Q = \sum \sum (Y_{ijk} - \mu_{..} - \alpha_i - \beta_j - (\alpha\beta)_{ij})^2$

$$\sum_i \alpha_i = 0 \quad \sum_j \beta_j = 0 \quad \sum_i (\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad \sum_j (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

paramètre	estimateur
$\mu_{..}$	$\hat{\mu}_{..} = \bar{Y}_{...}$ (84)
$\alpha_i = \mu_{i.} - \mu_{..}$	$\hat{\alpha}_i = \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}$ (85)
$\beta_j = \mu_{.j} - \mu_{..}$	$\hat{\beta}_j = \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...}$ (86)
$(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu_{..}$	$\hat{(\alpha\beta)}_{ij} = Y_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...}$ (87)

**ANOVA : analyse de la variance 2 facteurs avec n répétitions**

Source	SS	df	MS	F	p-value
A	SSA	a - 1	MSA = SSA / (a-1)	MSA / MSE	
B	SSB	b - 1	MSB = SSB / (b - 1)	MSB / MSE	
AB	SSAB	(a - 1)(b - 1)	MSAB = SSAB / (a-1)(b-1)	MSAB / MSE	
erreur	SSE	ab(n-1)	MSE = SSE / ab(n-1)	----	
totale	SStotale	abn - 1	----	-----	

$$SSA = nb \sum (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2 \quad \text{SSA} = na \sum (\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...})^2$$

$$SSAB = n \sum \sum (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...})^2$$

$$SSE = \sum \sum \sum (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i.j.})^2$$

$$SStotale = \sum \sum \sum (Y_{ij.} - \bar{Y}_{...})^2$$

**test de  $H_0 : (\alpha\beta)_{ij} = 0$  pour tout (i,j) vs  $H_a$  : certains  $(\alpha\beta)_{ij}$  ne sont pas zéro**  
 on rejette  $H_0$  si  $F = MSAB / MSE \geq F(1 - \alpha ; (a-1)*(b-1), (n-1)*ab)$  (88)

**test de  $H_0 : \alpha_1 = \alpha_1 = \dots = \alpha_a = 0$  vs  $H_a$  : certains  $\alpha_i$  ne sont pas zéro.**  
 on rejette  $H_0$  si  $F = MSA / MSE \geq F(1 - \alpha ; a-1, (n-1)*ab)$  (89)

**test de  $H_0 : \beta_1 = \beta_1 = \dots = \beta_b = 0$  vs  $H_a$  : certains  $\beta_j$  ne sont zéro.**  
 on rejette  $H_0$  si  $F = MSA / MSE \geq F(1 - \alpha ; b-1, (n-1)*ab)$  (90)

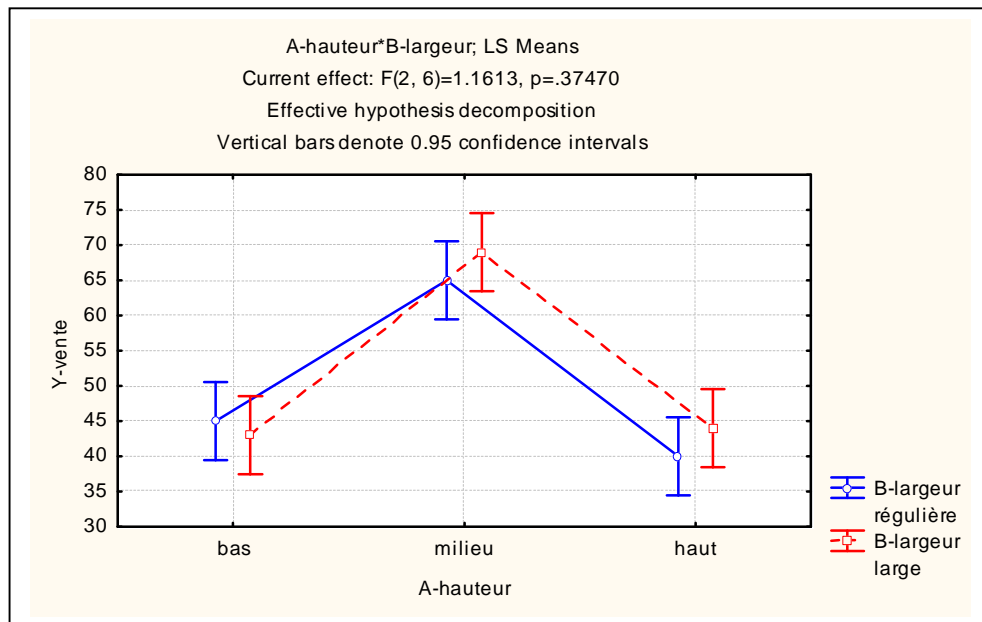
**Exemple 10 : étalage**

**Kutner 5 ed. p. 833**

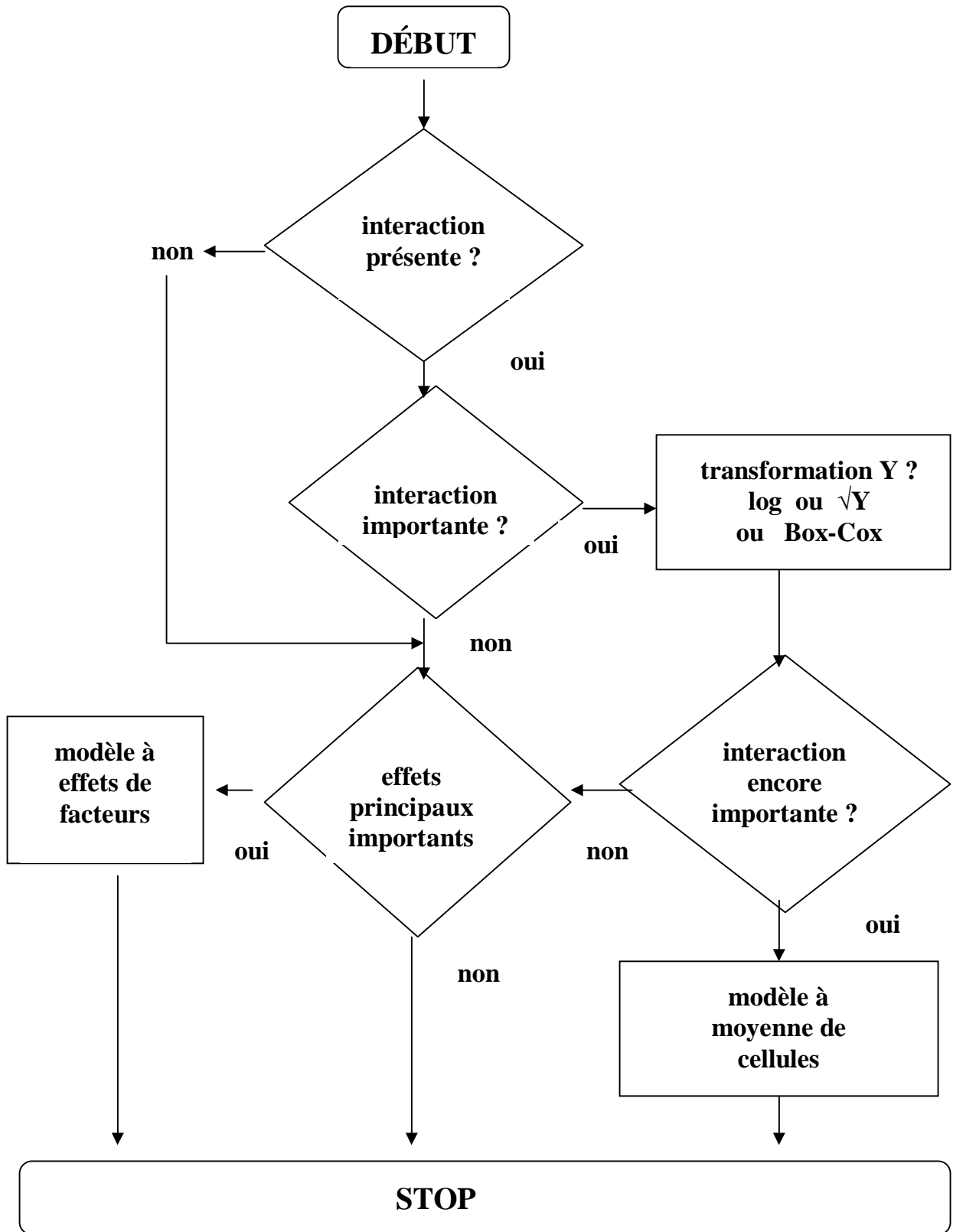
	A-hauteur	B-largeur	rep	Y-vente
1	bas	régulière	1	47
2	bas	régulière	2	43
3	bas	large	1	46
4	bas	large	2	40
5	milieu	régulière	1	62
6	milieu	régulière	2	68
7	milieu	large	1	67
8	milieu	large	2	71
9	haut	régulière	1	41
10	haut	régulière	2	39
11	haut	large	1	42
12	haut	large	2	46

**ANOVA**

	DF	SS	MS	F	p
<b>Intercept</b>	<b>1</b>	<b>31212</b>	<b>31212.0</b>	<b>3020.52</b>	<b>0.00000</b>
<b>A-hauteur</b>	<b>2</b>	<b>1544</b>	<b>772.0</b>	<b>74.71</b>	<b>0.00006</b>
<b>B-largeur</b>	<b>1</b>	<b>12</b>	<b>12.0</b>	<b>1.16</b>	<b>0.32261</b>
<b>A-hauteur*B-largeur</b>	<b>2</b>	<b>24</b>	<b>12.0</b>	<b>1.16</b>	<b>0.37470</b>
<b>Error</b>	<b>6</b>	<b>62</b>	<b>10.3</b>		
<b>Total</b>	<b>11</b>	<b>1642</b>			



**Stratégies pour l'étude de 2 facteurs**



**INTERACTION : présente (significative) ? importante (« grande ») ? transformation ?**

**exemple 11: Y : durée (minute) apprentissage tâche**

**facteur : genre (homme, femme) - age (jeune, moyen, agé)**

**3 versions de la réponse : Y1 aucune interaction**

**Y2 interaction importante (forte)**

**Y3 interaction faible**

**données**

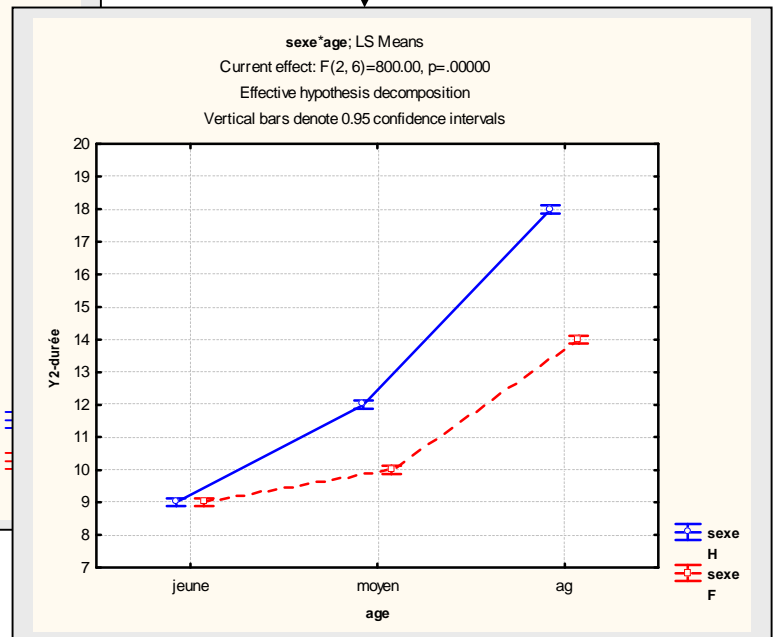
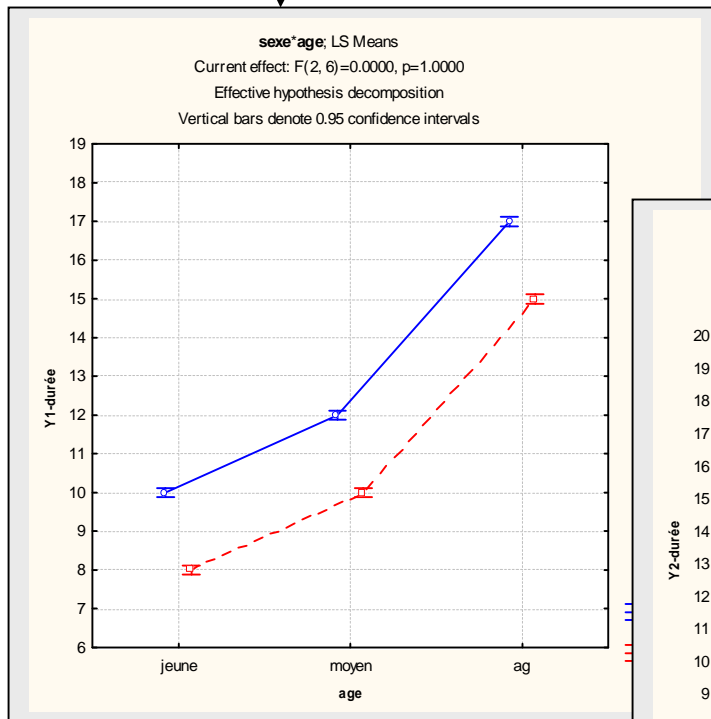
exemples :			Y1 aucune interaction			Y2 interaction importante			Y3 interaction faible		
	sexe	age	Y1 durée	Y2 durée	Y3 durée		sexe	age	Y1 moy	Y 2 moy	Y3 moy
1	H	jeune	9.95	8.95	9.75		H	jeune	10	9	9.8
2	H	moyen	11.95	11.95	11.95		H	moyen	12	12	12.0
3	H	agé	16.95	17.95	17.15		H	agé	17	18	17.2
4	F	jeune	7.95	8.95	8.15		F	jeune	8	9	7.8
5	F	moyen	9.95	9.95	9.95		F	moyen	10	10	10.0
6	F	agé	14.95	13.95	14.75		F	agé	15	14	15.2
7	H	jeune	10.05	9.05	9.85						
8	H	moyen	12.05	12.05	12.05		H		13	13	13
9	H	agé	17.05	18.05	17.25		F		11	11	11
10	F	jeune	8.05	9.05	8.25			jeune	9	9	9
11	F	moyen	10.05	10.05	10.05			moyen	11	11	11
12	F	agé	15.05	14.05	14.85			agé	16	16	16
							gen		12	12	12

$$\text{inter } Y = \bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...}$$

	sexe	age	Y1 moy	Y2 moy	Y3 moy		inter Y1	inter Y2	inter Y3
1	H	jeune	10	9	9.8		0	-1	-0.2
2	H	moyen	12	12	12.0		0	0	0
3	H	agé	17	18	17.2		0	1	0.2
4	F	jeune	8	9	8.2		0	1	-0.2
5	F	moyen	10	10	10.0		0	0	0
6	F	agé	15	14	14.8		0	-1	0.2

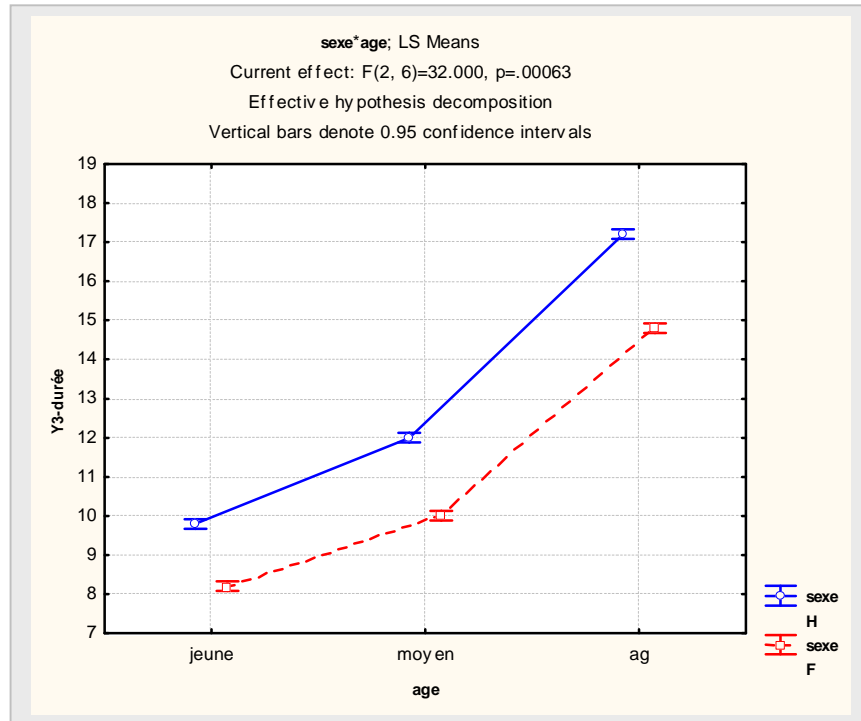
ANOVA : Y1					
	DF	SS	MS	F	p-value
Intercept	1	1728.00	1728	345600	0.0000
sexe	1	12.00	12	2400	0.0000
age	2	104.00	52	10400	0.0000
sexe*age	2	0.00	0	0	1.0000
Error	6	0.03	0.005		
Total	11	116.030			

ANOVA : Y2					
	DF	SS	MS	F	p-value
Intercept	1	1728	1728	345600	0.00000
sexe	1	12	12	2400	0.00000
age	2	104	52	10400	0.00000
sexe*age	2	8	4	800	0.00000
Error	6	0.03	0.005		
Total	11	124.03			





ANOVA : Y 3					
	DF	SS	MS	F	p-value
Intercept	1	1728	1728	345600	0.00000
sexe	1	12	12	2400	0.00000
age	2	104	52	10400	0.00000
sexe*age	2	0.32	0.16	32	0.00063
Error	6	0.03	0.005		
Total	11	116.35			



**Élimination d'interaction par transformation :**

**modèle multiplicatif**       $\mu_{ij} = \mu \alpha_i \beta_j$       (91)

$\log(\mu_{ij}) = \log(\mu) + \log(\alpha_i) + \log(\beta_j)$       (92)

$\mu'_{ij} = \mu' + \alpha'_i + \beta'_j$       (93)

**Avec un modèle multiplicatif, une analyse de Y détecterait la présence d'interaction. Une analyse de Y' = log(Y) donne un modèle additif sans interaction.**

**modèle racine**       $\mu_{ij} = (\sqrt{\alpha_i} + \sqrt{\beta_j})^2$       (94)  
 $= \alpha_i + \beta_j + 2\sqrt{\alpha_i}\sqrt{\beta_j}$  : modèle avec interaction

$\mu'_{ij} = (\mu_{ij})^{0.5} = \sqrt{\alpha_i} + \sqrt{\beta_j} = \alpha'_i + \beta'_j$       (95)  
 modèle sans interaction

**Une analyse de Y' = √ Y donne un modèle additif sans interaction.**

**Transformation de Box-Cox :      Y' = Y<sup>λ</sup> peut « éliminer » une interaction.**

**Analyse des effets avec un modèle additif : facteurs sans interaction sur Y**

$$E(Y_{ijk}) = \mu_{ij} = \mu_{..} + \alpha_{i.} + \beta_{.j} \tag{96}$$

modèle ajusté : 
$$\widehat{Y}_{ij} = \widehat{\mu}_{..} + \widehat{\alpha}_{i.} + \widehat{\beta}_{.j}$$

$$= \widehat{\mu}_{..} + (\widehat{\mu}_{i.} - \widehat{\mu}_{..}) + (\widehat{\mu}_{.j} - \widehat{\mu}_{..}) \tag{97}$$

$$= \overline{Y}_{...} + (\overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{...}) + (\overline{Y}_{.j.} - \overline{Y}_{...}) \tag{98}$$

contraste facteur A: 
$$L = \sum c_i \mu_i \quad \sum c_i = 0 \tag{99}$$

$$\widehat{L} = \sum c_i \widehat{\mu}_{i.} = \sum c_i \overline{Y}_{i..} \tag{100}$$

$$s^2(\widehat{L}) = (MSE / bn) \sum c_i^2 \tag{101}$$

$(\widehat{L} - L) / s(\widehat{L}) \sim \text{Student avec } (n-1)*ab \text{ degrés de liberté}$

Intervalle confiance  $L : \widehat{L} \pm t(1 - \alpha ; (n-1)*ab) \tag{102}$

comparaison pairée :  $D = \mu_{i.} - \mu_{i'}. \quad i \neq i'$

procedure de Tukey :  $H_0 : D = 0 \quad \text{vs} \quad H_a : D \neq 0$

rejet de  $H_0$  si  $|D| = |\overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{i'..}| > (MSE/bn)^{0.5} q(1 - \alpha ; a ; (n-1)*ab) \tag{103}$   
 $q(1 - \alpha ; a ; (n-1)*ab) : \text{“studentized range”}$

**autres procedures : Bonferroni, Scheffé**

**Aussi : formules analogues pour le facteur B**

formules analogues pour le facteur A et le facteur B combiné

référence : Kutner et all 5 ed. p. 851-855

**Exemple 11 : données sur la durée Y1 de l'apprentissage**

6 groupes définis par les combinaisons de age x sexe

Tukey HSD test; variable Y1-durée Approximate Probabilities for Post Hoc Tests								
Error: Between MS = .00500, df = 6								
	sexe	age	{1} 10	{2} 12	{3} 17	{4} 8	{5} 10	{6} 15
1	H	jeune		0.0002	0.0002	0.0002	1.0000	0.0002
2	H	moyen	0.0002		0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
3	H	agé	0.0002	0.0002		0.0002	0.0002	0.0002
4	F	jeune	0.0002	0.0002	0.0002		0.0002	0.0002
5	F	moyen	1.0000	0.0002	0.0002	0.0002		0.0002
6	F	agé	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	

**Analyse des effets en présence d'interactions importantes**

Si on ne peut éliminer une interaction importante entre 2 facteurs par une transformation (logarithmique ou racine) alors on peut analyser les effets des facteurs avec le modèle à moyenne de cellules.

**comparaison pairée**       $D = \mu_{ij} - \mu_{i'j'} \quad ij \neq i'j'$       (104)

**procédure de Tukey**       $D : \hat{D} \neq T s(\hat{D})$       (105)

$\hat{D} = \bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i'j'}$        $s^2(\hat{D}) = 2 * MSE / n$       (106)

$T = (1 / \sqrt{2}) q (1 - \alpha; ab, (n - 1) * ab)$       (107)

Test de  $H_0 : D = 0$  vs  $H_a : D \neq 0$

Rejet de  $H_0$  si  $|\hat{D}| > (1 / \sqrt{2}) s(\hat{D}) q (1 - \alpha; ab, (n-1)*ab)$       (108)

**contrastes multiples**       $L = \sum \sum c_{ij} \mu_{ij} \quad \sum \sum c_{ij} = 0$       (109)

**procédure de Scheffé**       $L : \hat{L} \pm S s(\hat{L})$       (110)

$\hat{L} = \sum \sum c_{ij} \bar{Y}_{ij.}$       (111)

$s(\hat{L}) = (MSE / n) * \sum \sum c_{ij}^2$       (112)

$S^2 = (ab - 1) * F (1 - \alpha; ab - 1, (n - 1) * ab)$       (113)

Test de  $H_0 : L = 0$  vs  $H_a : L \neq 0$

Rejet de  $H_0$  si  $(L^2 / ((ab - 1) s^2(\hat{L}))) > F (1 - \alpha; ab - 1, (n - 1) * ab)$       (114)

**Exemple 11 : données d'apprentissage Y2**

Scheffe test; variable Y2-durée			Probabilities for Post Hoc Tests					
Error: Between MS = .00500, df = 6			{1}	{2}	{3}	{4}	{5}	{6}
	sexe	age	9	12	18	9	10	14
1	H	jeune		0.0000	0.0000	1.0000	0.0002	0.0000
2	H	moyen	0.0000		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	H	agé	0.0000	0.0000		0.0000	0.0000	0.0000
4	F	jeune	1.0000	0.0000	0.0000		0.0002	0.0000
5	F	moyen	0.0002	0.0000	0.0000	0.0002		0.0000
6	F	agé	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	

**« Pooling » lorsque l'interaction n'est pas significative**

Avec 2 facteurs on postule toujours pour commencer un modèle avec un effet d'interaction (voir eq. (75)). Si à l'analyse on constate que l'interaction n'est pas significative, on peut réviser le modèle et postuler un modèle sans interaction c-à-d sans le terme  $(\alpha\beta)_{ij}$  dans l'équation (75). Cette opération peut se faire à condition que le ratio F soit petit, disons  $< 2$ . Les conséquences de cette opération sont:

$$\text{SSE (modèle révisé)} = \text{SSE (modèle complet)} + \text{SSAB} \quad (115)$$

$$\text{df (modèle révisé)} = (a - 1)(b-1) + (n - 1)ab = nab - a - b - 1 \quad (116)$$

$$\text{MSE (modèle révisé)} = \text{SSE (modèle révisé)} / \text{df (modèle révisé)} \quad (117)$$

En général, le MSE (modèle révisé) devrait être « voisin » du MSE (modèle complet). Les résultats des tests de signification des effets principaux des facteurs ne devraient pas changer suite à cette opération.

**CAS où le nombre de répétition  $n = 1$** 

Si  $n = 1$ , il n'est plus possible d'estimer la variance  $\sigma^2$  avec les répétitions. La seule possibilité est de postuler un modèle sans interaction :

$$Y_{ij} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \quad (118)$$

Le tableau d'analyse de la variance prend une forme plus simple comparativement à celui avec  $n_{ij} = n > 1$  (page 50).

ANOVA : 2 facteurs avec  $n = 1$ 

Source	SS	df	MS	F	p-value
A	SSA	a-1	MSA = SSA / (a - 1)	MSA / MSAB	
B	SSB	b-1	MSB = SSB / (b-1)	MSB / MSAB	
erreur	SSAB	(a-1)(b-1)	MSAB = SSAB / (a-1)(b-1)	-----	
totale	SStotale	ab - 1	-----	-----	

$$\text{SSA} = b \sum (Y_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 \quad \text{SSB} = a \sum (Y_{.j} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (119)$$

$$\text{SSAB} = \sum \sum (Y_{ij} - Y_{i.} - Y_{.j} + \bar{Y}_{..})^2 \quad (120)$$

$$\text{SStotale} = \sum \sum (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (121)$$

La somme de carrés SSAB est maintenant employée pour estimer l'erreur expérimentale.

Le test d'hypothèse de la nullité du facteur A est basé sur le ratio  $F = \text{SSA} / \text{SSAB}$  qui suit une loi F (a - 1, (a-1)(b-1)). Un résultat analogue s'applique pour le facteur B.

**Le test de Tukey pour détecter la présence d'une interaction avec n = 1**

Il est possible de tester la présence d'une interaction avec n = 1. On suppose que l'interaction est de la forme d'un produit comme dans un polynôme :

$$(\alpha\beta)_{ij} = D \alpha_i \beta_j \quad (122)$$

où D est une constante. L'estimateur de D est

$$\hat{D} = [\sum \sum \hat{\alpha}_i \hat{\beta}_j Y_{ij}] / [\sum \alpha_i^2 \sum \beta_j^2] \quad (123)$$

$$= [\sum \sum (Y_{i.} - Y_{..})(Y_{.j} - Y_{..}) Y_{ij}] / C \quad (124)$$

où 
$$C = \sum (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 \sum (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (125)$$

La somme de carrés associée à cette forme d'interaction est:

$$SSAB^* = [\sum \sum (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})(\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}) Y_{ij}]^2 / C \quad (126)$$

La somme de carrés résiduelle SSresid est :

$$SSresid = SStotale - SSA - SSB - SSAB^* \quad (127)$$

On peut montrer que 
$$F^* = SSAB^* / (SSresid / (ab - a - b)) \quad (128)$$

suit une loi de Fisher-Snedecor  $F(1, ab - a - b)$

test de  $H_0 : D = 0$  vs  $H_a : D \neq 0 \quad (126)$

on rejette  $H_0$  si  $F^* > F(1 - \alpha; 1, ab - a - b) \quad (127)$

**Exemple :** données d'apprentissage (exemple 11)  $Y = Y_2$  et 6 premières observations

$$\bar{Y}_{..} = 11.95 \quad \bar{Y}_{1.} (\text{homme}) = 12.95 \quad \bar{Y}_{2.} (\text{femme}) = 10.95$$

$$\bar{Y}_{.1} (\text{jeune}) = 8.95 \quad \bar{Y}_{.2} (\text{moyen}) = 10.95 \quad \bar{Y}_{.3} (\text{agé}) = 15.95$$

$$\sum \sum (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 = 2 \quad \sum \sum (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2 = 26$$

$$\sum \sum (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})(\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}) Y_{ij} = 0$$

$$\hat{D} = 0 \quad SSAB^* = 0^2 / 2 * 26 = 0$$

$$SSresid = 61.95 - 6 - 52 - 0 = 3.95 \quad F^* = 0 / 3.95 = 0$$

$H_0$  n'est pas rejetée.

**Remarques**

§ Si le test de l'interaction est significatif on peut employer une transformation de type Box-Cox pour essayer de l'éliminer. Cela élargit l'éventail des 2 transformations (log et racine) suggérées à la page 55.

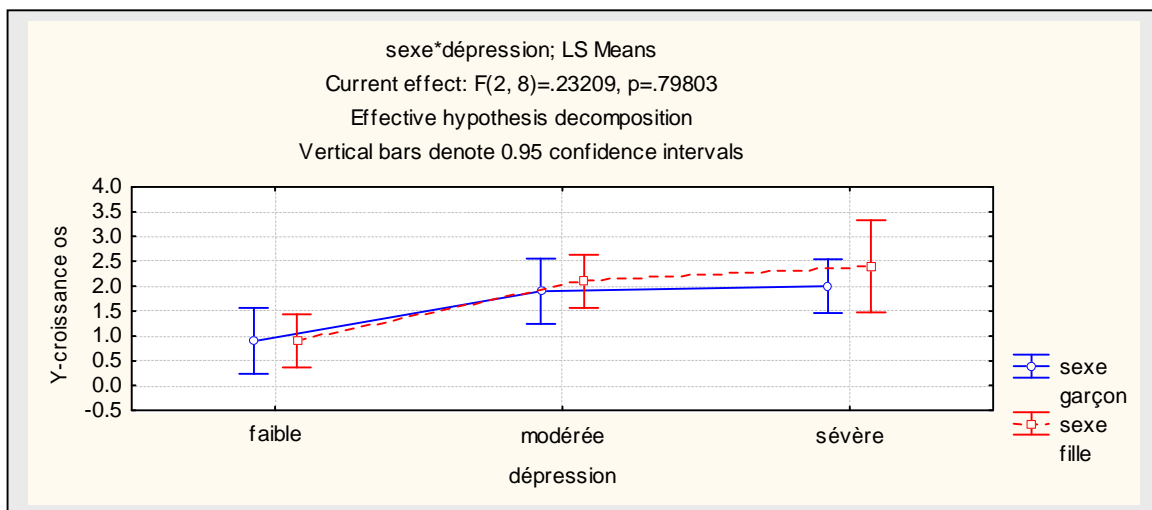
§ Le test de Tukey est probablement plus utile lorsque les 2 facteurs sont quantitatifs

**Cas où le nombre de répétitions  $n_{ij}$  sont inégaux et  $> 0$**

Dans les études observationnelles et, occasionnellement dans les études expérimentales, les tailles échantillonnelles  $n_{ij}$  sont généralement inégales. Cela a pour conséquence que l'orthogonalité de la décomposition des sommes de carrés de l'ANOVA n'existe plus : l'addition des sommes de carrés des effets (principaux et interactions) n'est plus égale à la somme totale des carrés SSTO. La situation est analogue à celle de la méthode régression où l'on a rarement l'orthogonalité dans la structure des données. Les tailles inégales ont pour conséquence que l'unicité du modèle n'est plus assurée. On analyse les données avec le modèle linéaire général en introduisant des variables indicatrices pour les modalités.

**Exemple 12 : données sur la croissance des os (Y) Kutner et all 5 ed. p. 954**  
 facteurs : sexe enfant (garçon, fille)      dépression (sévère, modérée, faible)

	sexe	dépression	rep	Y-croissance os	X1	X2	X3	X1X2	X1X3
1	garçon	sévère	1	1.4	1	1	0	1	0
2	garçon	sévère	2	2.4	1	1	0	1	0
3	garçon	sévère	3	2.2	1	1	0	1	0
4	garçon	modérée	1	2.1	1	0	1	0	1
5	garçon	modérée	2	1.7	1	0	1	0	1
6	garçon	faible	1	0.7	1	-1	-1	-1	-1
7	garçon	faible	2	1.1	1	-1	-1	-1	-1
8	fille	sévère	1	2.4	-1	1	0	-1	0
9	fille	modérée	1	2.5	-1	0	1	0	-1
10	fille	modérée	2	1.8	-1	0	1	0	-1
11	fille	modérée	3	2.0	-1	0	1	0	-1
12	fille	faible	1	0.5	-1	-1	-1	1	1
13	fille	faible	2	0.9	-1	-1	-1	1	1
14	fille	faible	3	1.3	-1	-1	-1	1	1



On introduit une variable indicatrice ( $X_1$ ) pour le facteur sexe et 2 variables indicatrices ( $X_2, X_3$ ) pour le facteur dépression :

$$\begin{array}{ll} X_1 = 1 & \text{si sexe = garçon} & X_1 = -1 & \text{si sexe = fille} \\ X_2 = 1 & \text{si dépression = sévère} & X_2 = 0 & \text{autrement} \\ X_3 = 1 & \text{si dépression = modérée} & X_3 = 0 & \text{autrement} \end{array}$$

Le modèle à effets principaux et d'interaction est :

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (128)$$

$$\begin{array}{lll} i = 1, 2 & j = 1, 2, 3 & k = 1, 2, \dots, n_{ij} \\ n_{11} = 3 & n_{12} = 2 & n_{13} = 2 \\ n_{21} = 1 & n_{22} = 3 & n_{23} = 3 \end{array}$$

Le modèle équivalent (modèle complet) écrit avec les variables indicatrices est:

$$\text{MC: } Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_1 X_{ijk1} + \beta_1 X_{ijk2} + \beta_2 X_{ijk3} + (\alpha\beta)_{11} X_{ijk1} X_{ijk2} + (\alpha\beta)_{12} X_{ijk1} X_{ijk3} + \varepsilon_{ijk} \quad (129)$$

La procédure pour l'examen des effets de A (sexe), de B (dépression) et de l'interaction AB est basée sur l'ajustement de 4 modèles de régression MC, M1, M2, M3:

1. test de la nullité des effets d'interaction  $(\alpha\beta)_{11}$  et de  $(\alpha\beta)_{12}$

$$H_1: (\alpha\beta)_{11} = (\alpha\beta)_{12} = 0 \text{ vs } H_a: \text{non } H_0$$

$$\text{MR1: } Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_1 X_{ijk1} + \beta_1 X_{ijk2} + \beta_2 X_{ijk3} + \varepsilon_{ijk} \quad (130)$$

2. test de la nullité de l'effet principal du facteur A

$$H_2: \alpha_1 = 0 \text{ vs } H_a: \text{non } H_0$$

$$\text{MR2: } Y_{ijk} = \mu_{..} + \beta_1 X_{ijk2} + \beta_2 X_{ijk3} + (\alpha\beta)_{11} X_{ijk1} X_{ijk2} + (\alpha\beta)_{12} X_{ijk1} X_{ijk3} + \varepsilon_{ijk} \quad (131)$$

3. test de la nullité de l'effet principal du facteur B

$$H_3: \beta_1 = \beta_2 = 0 \text{ vs } H_a: \text{non } H_0$$

$$\text{MR3: } Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_1 X_{ijk1} + (\alpha\beta)_{11} X_{ijk1} X_{ijk2} + (\alpha\beta)_{12} X_{ijk1} X_{ijk3} + \varepsilon_{ijk} \quad (132)$$

MR1, MR2, MR3 constituent des modèles réduits ; ils contiennent moins de paramètres que le modèle complet MC. Les tests d'hypothèses  $H_1, H_2, H_3$  sont réalisés par un test F basé sur la réduction de la somme de carrés de l'erreur (résiduelle) SSE calculée sous le modèle complet SSE(C) et la somme de carrés de l'erreur SSE calculée sous le modèle réduit SS(R).

$$\begin{aligned} F^* &= [(SSE(R) - SSE(C)) / (df(R) - df(C))] / [SSE(C) / df(C)] \quad (133) \\ &= [\Delta SSE / \Delta df] / MSE(C) \end{aligned}$$

Le ratio  $F^*$  suit une loi  $F(df(R) - df(C), df(C))$

Les résultats de ces analyses de modélisation sont résumés dans le tableau suivant.

modèle	contante	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\beta_2$	$(\alpha \beta)_{12}$	$(\alpha \beta)_{12}$
MC	1.70	0.1	0.10	0.50	0.30	0.0
MR1	1.68	0.086	0.467	0.327	0	0
MR2	1.69	0	0.444	0.328	- 0.067	- 0.017
MR3	1.63	0.019	0	0	0.067	- 0.193

SSTO = 5.77 avec 13 degrés de liberté

modèle	SSmodèle	SSE	df(mod)	df(C)	R <sup>2</sup>	R <sup>2</sup> ajusté
MC	4.47	1.30	5	8	0.77	0.63
MR1	4.40	1.38	3	10	0.76	0.69
MR2	4.35	1.42	4	9	0.75	0.64
MR3	0.28	5.49	3	10	0.55	0.35

test	delta SSE / delta (df)	MSE	Ratio F	p value
H <sub>1</sub>	0.037 / 2	1.3 / 8	0.23	0.80
H <sub>2</sub>	0.120 / 1	1.3 / 8	0.74	0.41
H <sub>3</sub>	2.09 / 2	1.3 / 8	12.89	0.003

H<sub>3</sub> est rejetée : le facteur dépression est significatif sur Y.

H<sub>2</sub> n'est pas rejetée : le facteur sexe n'est pas significatif sur Y.

H<sub>1</sub> n'est pas rejetée : il n'y a pas d'effet d'interaction.

ANOVA					
	df	SS	MS	F	p-value
Intercept	1	34.680	34.680	213.42	0.0000
sexe	1	0.120	0.120	0.74	0.4152
dépression	2	4.190	2.095	12.89	0.0031
sexe*dépression	2	0.075	0.038	0.23	0.7980
Error	8	1.300	0.162		
Total	13	5.774			

A la suite du tableau d'analyse de la variance, il est utile de compléter l'analyse avec des intervalles de confiance :

- § les moyennes de niveau (modalité) de facteurs
- § les différences entre les paires de moyennes
- § des contrastes ou combinaisons linéaires de moyennes
- § des comparaisons multiples

Consulter Kutner et all 5 ed. p. 961-962.

Dans certaines applications les moyennes  $\mu_{ij}$ ,  $\mu_i$ ,  $\mu_{.j}$  n'ont pas la même importance. Les inférences se font sur des combinaisons linéaires de moyennes dont les coefficients reflètent l'importance des moyennes.

Consulter Kutner et all 5 ed. p. 970-974.



## 9. Analyse de covariance

Cette méthode d'analyse combine les éléments des modèles de régression et les modèles d'analyse de la variance. L'idée de base est d'augmenter les modèles d'analyse de variance contenant les effets de facteurs qualitatifs avec une ou plusieurs variables quantitatives qui sont reliées à la variable de réponse. Cette augmentation a pour objectif de réduire la variance du terme d'erreur dans le modèle augmentant ainsi la sensibilité de l'analyse à détecter des effets significatifs. Les modèles d'analyse de covariance sont des cas particuliers des modèles d'analyse de régression avec un mélange de variables quantitatives et de variables qualitatives représentées par des variables indicatrices de type 0-1.

### Variables concomitantes (covariables)

Chaque variable quantitative est appelée une *covariable*. Ces variables doivent avoir une certaine corrélation avec la variable de réponse. Ces variables doivent être observées durant l'étude et ne doivent pas être reliées aux traitements de l'étude.

**Exemple 13** : campagne promotionnelle de vente d'un produit alimentaire  
facteur : type de promotion

1 : échantillonnage du produit par les clients

2 : espace additionnel dans les étagères habituelles

3 : étalage additionnel dans les allées

réponse Y : volume des ventes

covariable X : volume des ventes de la période précédente

Kutner et all 5 ed. p. 926				
	promotion	magasin	X-vente avant	Y-vente
1	1	11	21	38
2	1	12	26	39
3	1	13	22	36
4	1	14	28	45
5	1	15	19	33
6	2	21	34	43
7	2	22	26	38
8	2	23	29	38
9	2	24	18	27
10	2	25	25	34
11	3	31	23	24
12	3	32	29	32
13	3	33	30	31
14	3	34	16	21
15	3	35	29	28

**Exemple 14 : bois traité****Contexte et données de l'étude CCA : « Chromate Copper Arsenate »**

Le CCA préserve le bois des dommages causés par l'eau et les insectes. Le CCA présente des risques pour la santé et l'environnement. Une nouvelle solution dite « organic » pourrait remplacer le CCA. Une étude statistique fut conduite pour comparer les deux solutions. Les données du fichier représentent 360 planches de pin traitées avec les 2 solutions à 3 niveaux de concentration: 0.25, 0.80 et 2.25 (lbs/pi cu). Ces niveaux de concentration sont employés pour 3 applications typiques: bois exposé à l'air, bois de fondation, bois en eau salée. Les planches traitées furent placées dans des chambres à un vieillissement accéléré durant plusieurs heures. Chaque heure représente l'équivalent d'une exposition d'une année aux éléments. Suite à l'application de la solution et du processus de vieillissement, chaque planche fut soumise à un test de bris à la rupture représenté par la variable « Load ». Cette variable de réponse est du type « larger the better ». Les facteurs contrôlés sont : Concentration, Solution. Heures est un facteur continu mesuré (covariable). Objectif de l'expérience : comparer la performance (LOAD) de la solution « organic » avec la solution CCA. La solution « organic » est-elle aussi bonne que la solution CCA?

Données				
	Concentration Facteur 1	Solution Facteur 2	X-heure covariable	Y-Load réponse
1	0.25	CCA	1.0	15.597
2	0.25	ORG	1.0	11.025
3	0.80	CCA	1.0	12.329
4	0.80	ORG	1.0	14.275
5	2.50	CCA	0.9	18.739
6	2.50	ORG	1.0	16.668
7	0.25	CCA	2.0	14.826
8	0.25	ORG	2.0	9.447
9	0.80	CCA	2.1	14.553
10	0.80	ORG	2.1	12.894
.	.	.	.	.
358	0.80	ORG	60.1	9.183
359	2.50	CCA	59.9	15.035
360	2.50	ORG	60.1	15.569

**Exemple 15 : comparaison de 2 méthodes d'enseignement**

facteur : méthode d'enseignement (M = magistral, D = distance)

réponse Y : résultats à un examen commun

covariables X1 : cote R (CEGEP)

X2 : moyenne cumulative de l'étudiant à Polytechnique

**Modèle d'analyse de covariance avec un facteur**

$$Y_{ij} = \mu_{.} + \tau_i + \gamma (X_{ij} - \overline{X_{.j}}) + \varepsilon_{ij} \quad (134)$$

où  $\mu_{.}$  : moyenne générale  
 $\tau_i$  : effet différentiel du facteur avec la contrainte  $\sum \tau_i = 0$  (135)  
 $\gamma$  : coefficient de régression (pente) entre X et Y - indépendante du facteur  
 $X_{ij}$  : constantes connues de la covariable X  
 $\varepsilon_{ij}$  : terme d'erreur  $\sim N(0, \sigma^2)$   
 $i = 1, 2, \dots, g$        $j = 1, 2, \dots, n_i$

**conséquence**  $Y_{ij} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2)$        $\mu_{ij} = \mu_{.} + \tau_i + \gamma (X_{ij} - \overline{X_{.j}})$

**remarques**

- § l'hypothèse que la pente  $\gamma$  est constante est cruciale : il n'y a pas d'interaction entre la covariable X et le facteur d'intérêt. Sinon il faut employer des équations de régressions distinctes : une pour chaque modalité du facteur.
- § On peut avoir plusieurs covariables : X, W,...
- § On utilisera des variables indicatrices pour le facteur qualitatif : on introduit  $(g - 1)$  variables  $I_i$  prenant les valeurs 1, -1, 0

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{si l'observation provient du traitement } i = 1, 2, \dots, g-1 \\ -1 & \text{si l'observation provient du traitement } g \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

- § l'analyse du modèle de covariance devient un cas du modèle linéaire général

L'équation (135) devient

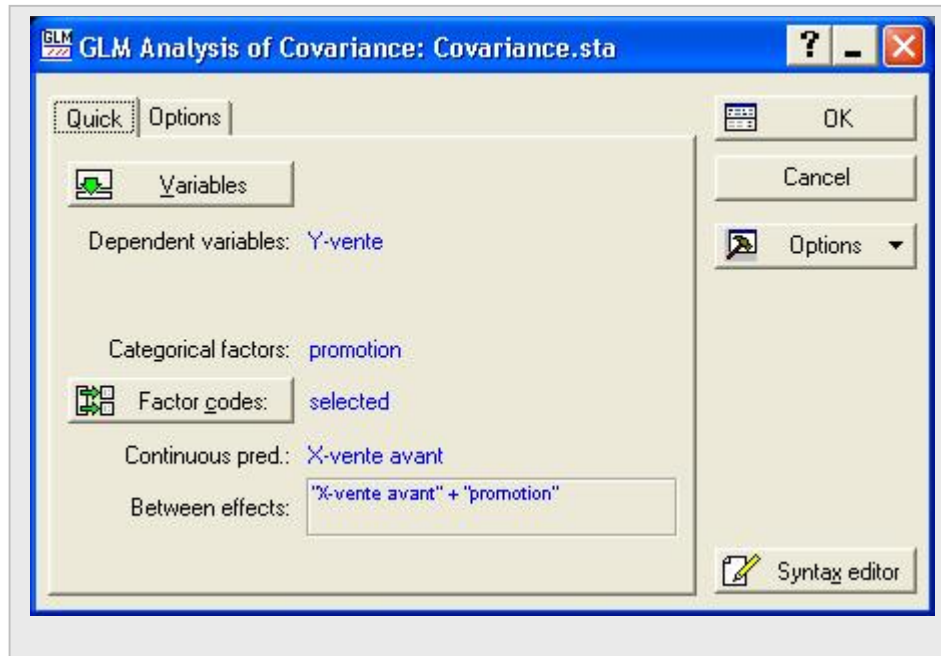
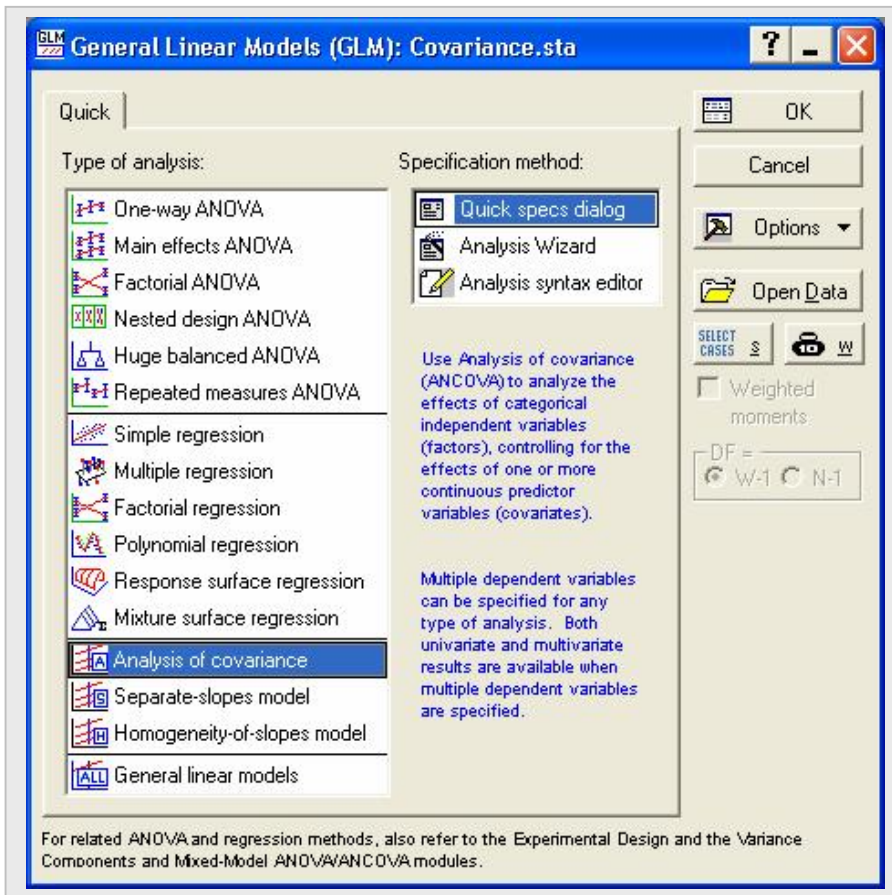
$$Y_{ij} = \mu_{.} + \tau_1 I_{ij1} + \tau_2 I_{ij2} + \dots + \tau_{g-1} I_{ijg-1} + \gamma x_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad (136)$$

$$\text{où } x_{ij} = X_{ij} - \overline{X_{.j}} \quad (137)$$

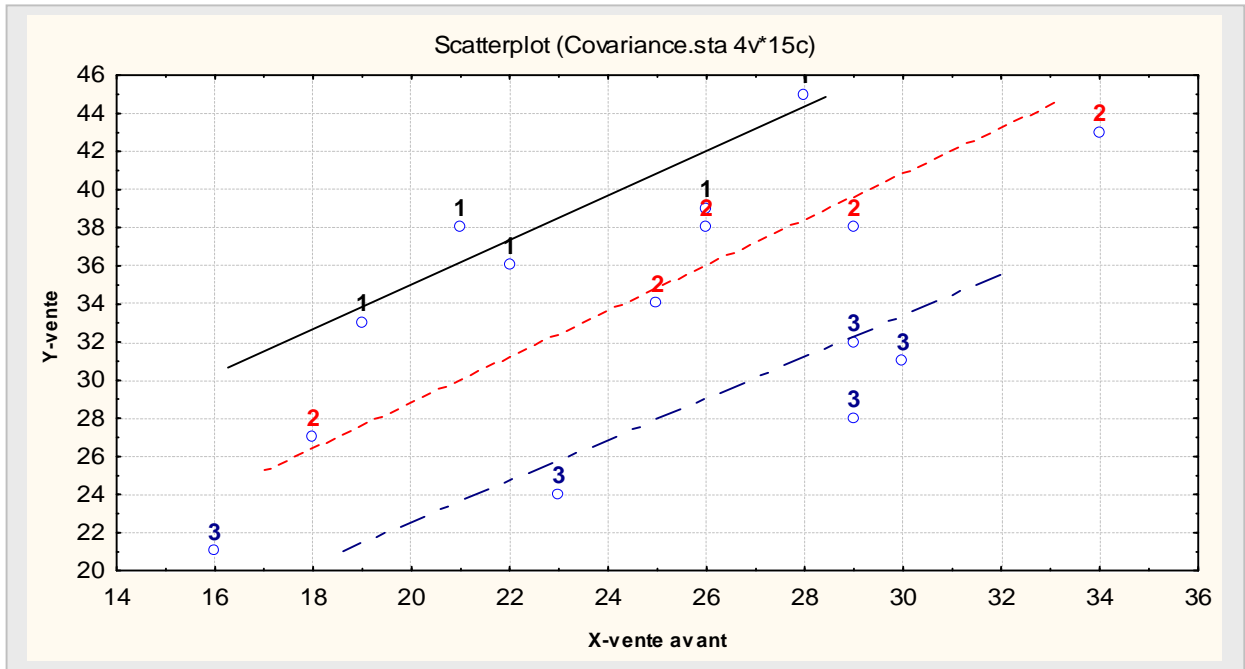
**inférence d'intérêt**       $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_{g-1} = 0$  (138)  
vs  $H_a$  : les  $\tau_i$  ne sont pas tous nuls

le test est conduit en comparant le résultat de l'ajustement du modèle complet avec le résultat de l'ajustement du modèle réduit sous l'hypothèse  $H_0$ .

**L'analyse de covariance avec Statistica utilise le module « Linear general model »**

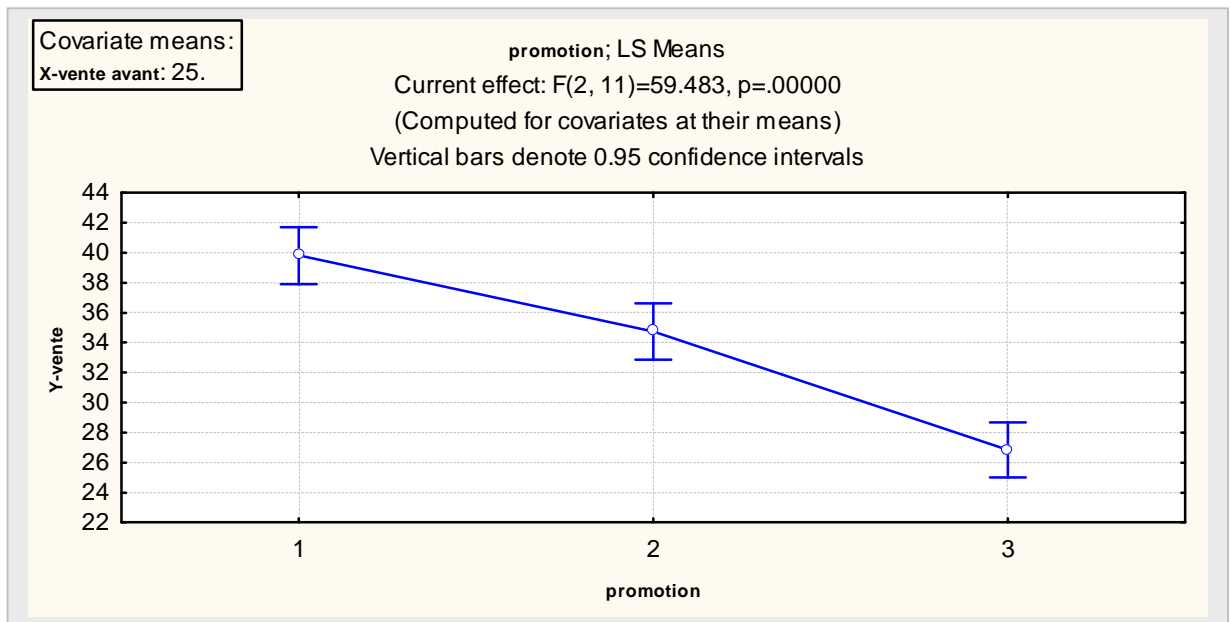


**Exemple 13 : campagne promotionnelle**



**ANCOVA**

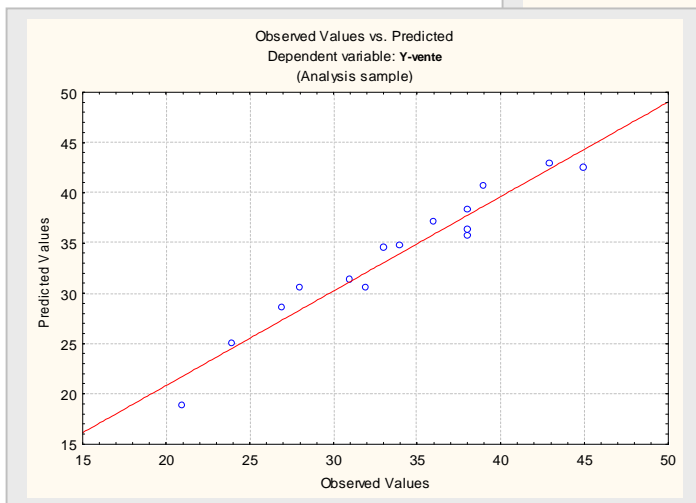
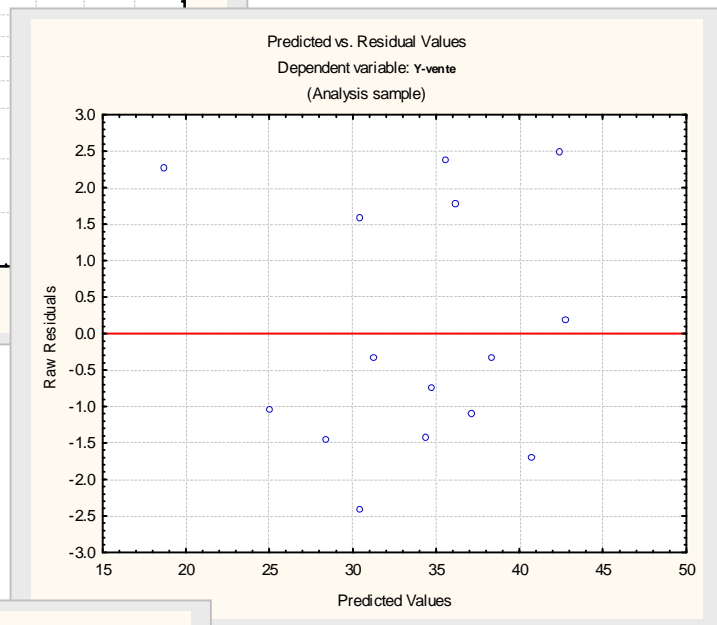
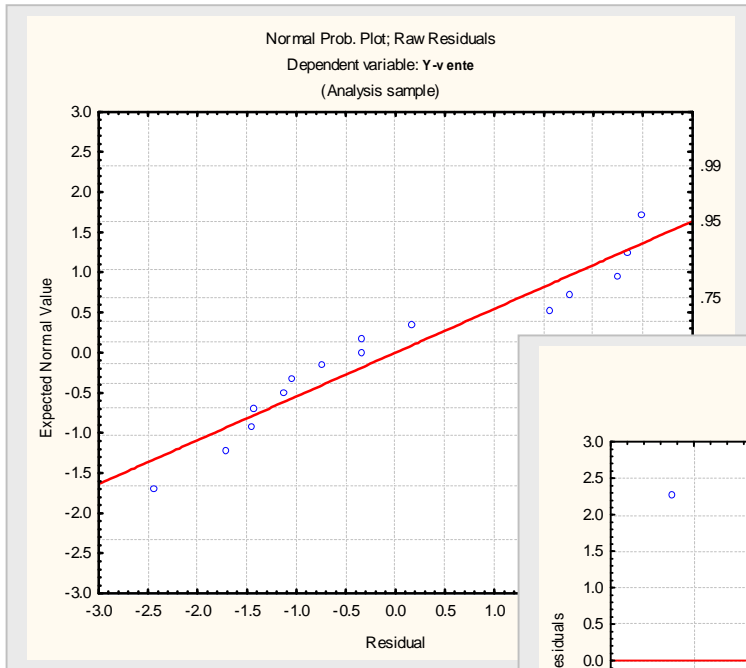
	df	Y-vente	Y-vente	Y-vente	Y-vente
<b>Intercept</b>	<b>1</b>	<b>66.16</b>	<b>66.16</b>	<b>18.9</b>	<b>0.001168</b>
<b>X-vente avant</b>	<b>1</b>	<b>269.03</b>	<b>269.03</b>	<b>76.7</b>	<b>0.000003</b>
<b>promotion</b>	<b>2</b>	<b>417.15</b>	<b>208.58</b>	<b>59.5</b>	<b>0.000001</b>
<b>Error</b>	<b>11</b>	<b>38.57</b>	<b>3.51</b>		
<b>Total</b>	<b>14</b>	<b>646.40</b>			



**Tukey HSD test; MS = 3.5065, df = 11.000**

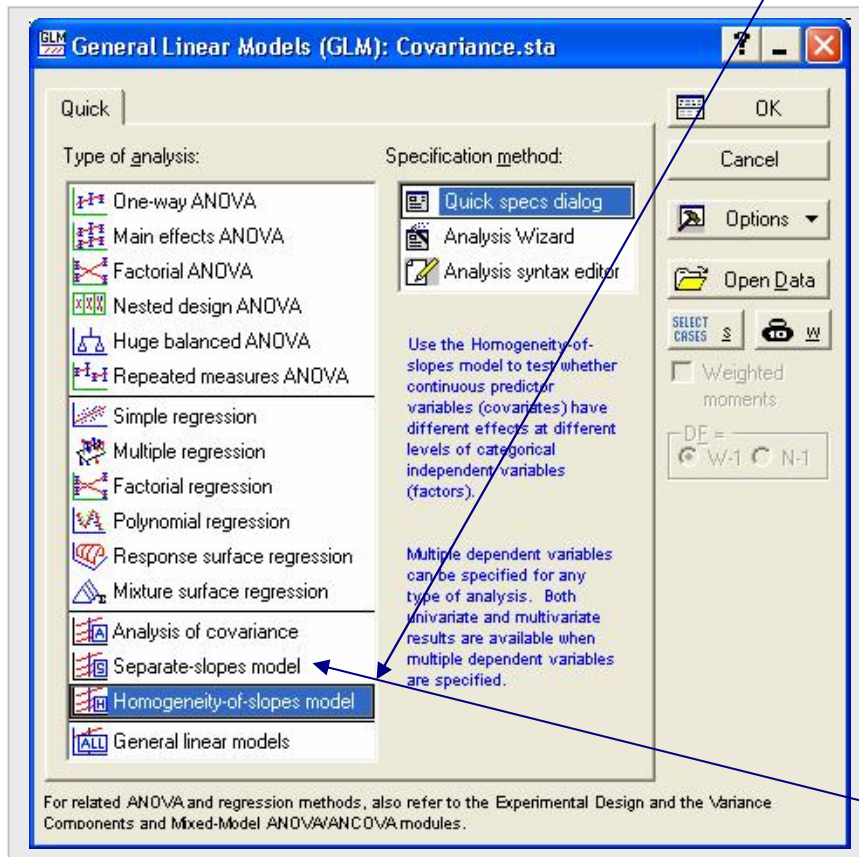
	<b>promotion moyenne</b>	<b>{1} 38.2</b>	<b>{2} 36.0</b>	<b>{3} 27.2</b>
<b>1</b>	<b>1</b>		<b>0.1970</b>	<b>0.0002</b>
<b>2</b>	<b>2</b>	<b>0.1970</b>		<b>0.0002</b>
<b>3</b>	<b>3</b>	<b>0.0002</b>	<b>0.0002</b>	

**Analyse des résidus**



Avait-on raison de penser que la pente  $\gamma$  est identique pour les 3 types de promotion ?

On peut tester cette hypothèse avec la procédure « Homogeneity of slopes model »



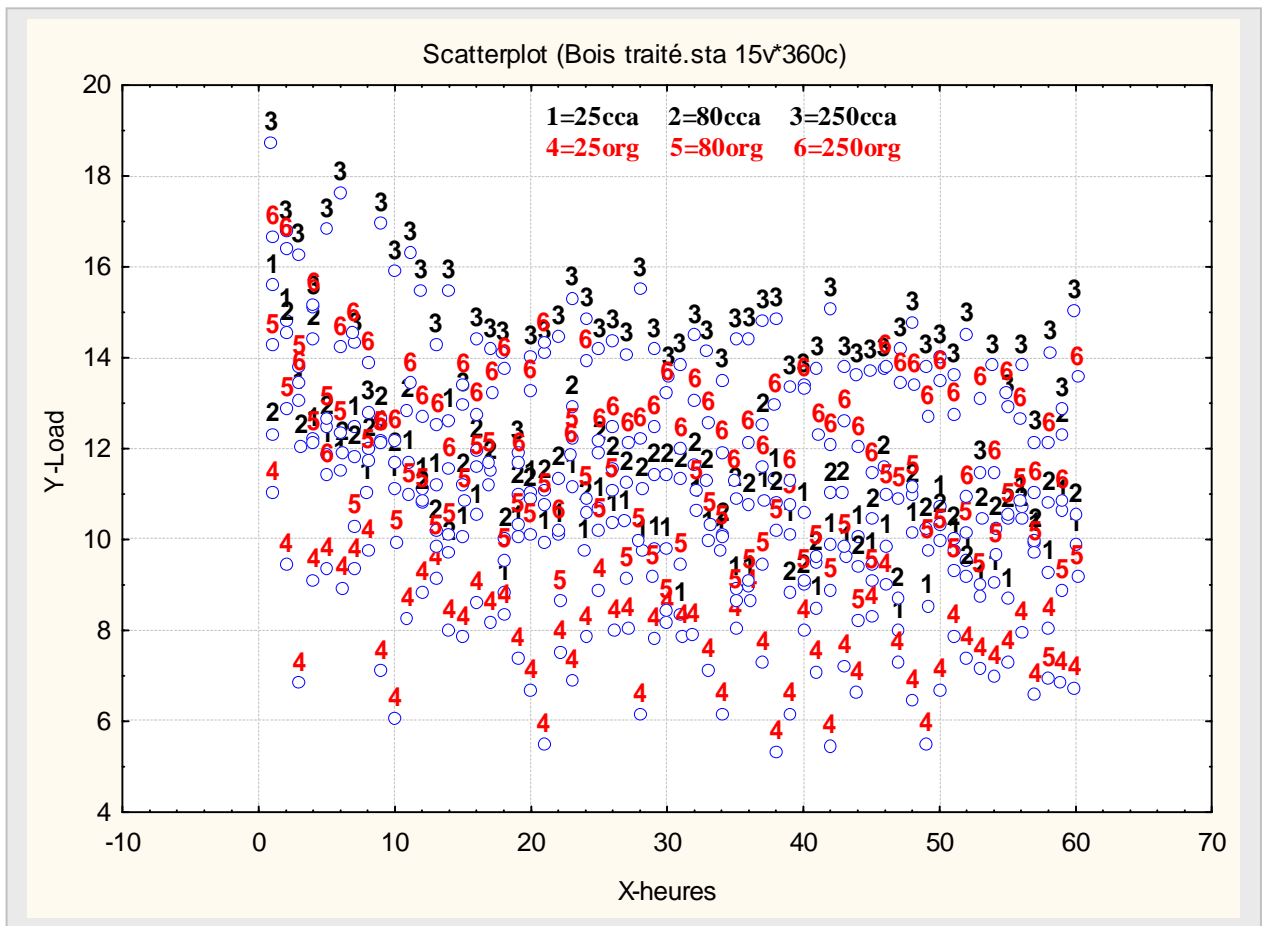
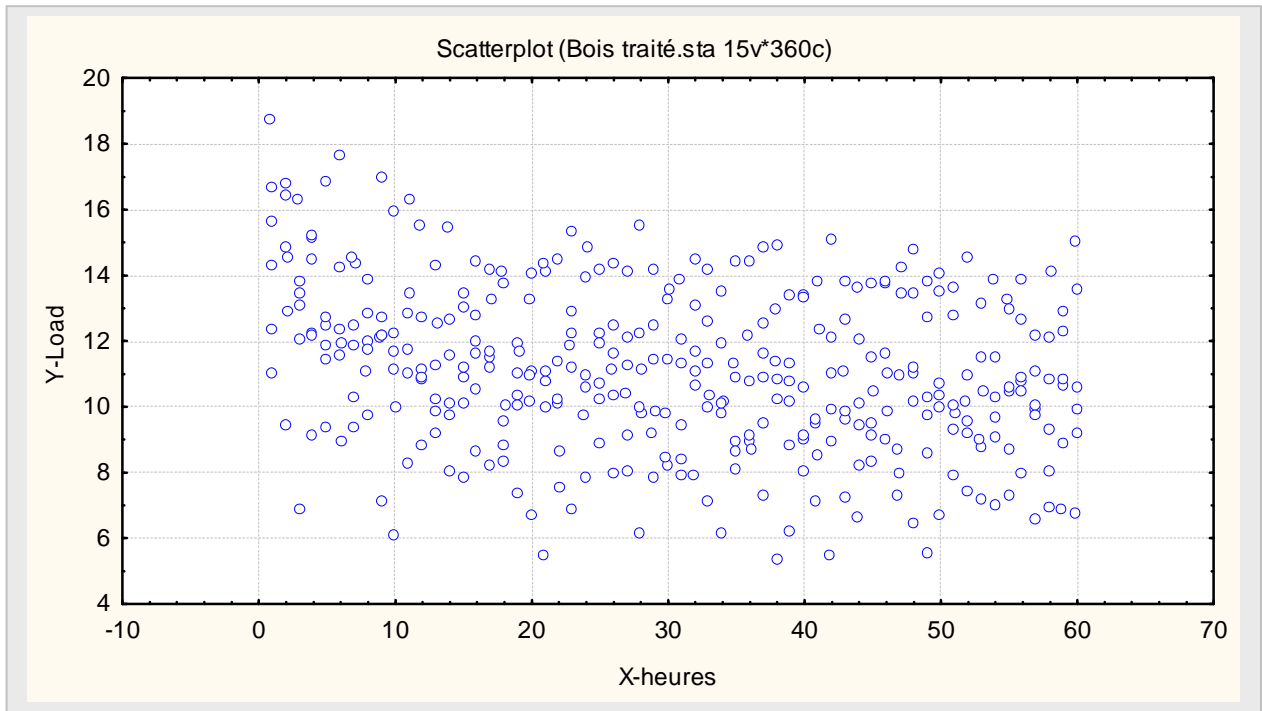
**pentés égales ? : test de l'interaction  
covariable X facteur**

	DF	SS	MS	F	p-value
<b>Intercept</b>	<b>1</b>	<b>48.74</b>	<b>48.74</b>	<b>13.917</b>	<b>0.0047</b>
<b>promotion</b>	<b>2</b>	<b>1.26</b>	<b>0.63</b>	<b>0.180</b>	<b>0.8379</b>
<b>X-vente avant</b>	<b>1</b>	<b>243.14</b>	<b>243.14</b>	<b>69.423</b>	<b>0.0000</b>
<b>promotion*X-vente avant</b>	<b>2</b>	<b>7.05</b>	<b>3.53</b>	<b>1.007</b>	<b>0.4032</b>
<b>Error</b>	<b>9</b>	<b>31.52</b>	<b>3.50</b>		
<b>Total</b>	<b>14</b>	<b>646.40</b>			

Le modèle à pentés égales est acceptable car l'interaction n'est pas significative. Lorsque l'on rejette l'hypothèse, on emploie le modèle à pentés distinctes.

**Exemple 14 : bois traité**

**Analyse de covariance avec 2 facteurs**





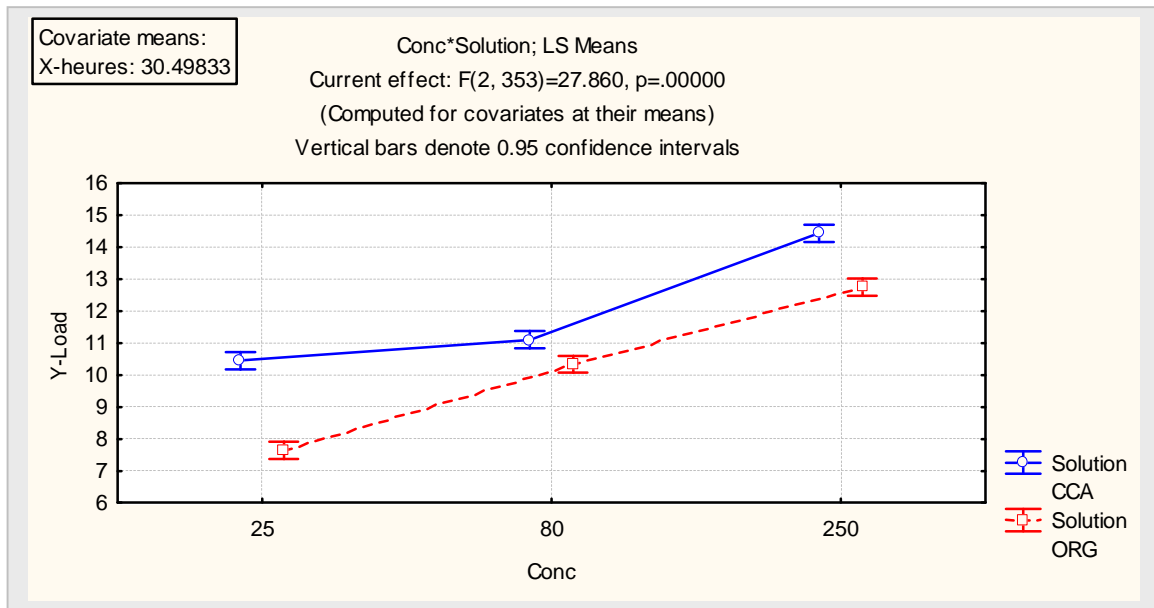
**Test de l'homogénéité des pentes**

Test d'homogénéité pentes					
	DF	SS	MS	F	p-value
Intercept	1	13411.29	13411.29	12037.08	0.000000
Conc	2	276.09	138.04	123.90	0.000000
Solution	1	90.91	90.91	81.59	0.000000
X-heures	1	180.89	180.89	162.35	0.000000
Conc*Solution	2	33.40	16.70	14.99	0.000001
Conc*X-heures	2	1.52	0.76	0.68	0.506072
Solution*X-heures	1	2.36	2.36	2.12	0.146050
Conc*Solution*X-heures	2	5.07	2.53	2.27	0.104406
Error	348	387.73	1.11		
Total	359	2184.32			

Il n'y a pas d'interaction de la covariable X-heures avec les facteurs Conc et Solution.

**Modèle avec pente homogène (analyse de covariance)**

ANCOVA					
	DF	SS	MS	F	p-value
Intercept	1	13411.64	13411.64	11934.61	0.000000
X-heures	1	180.93	180.93	161.01	0.000000
Conc	2	1268.41	634.21	564.36	0.000000
Solution	1	275.61	275.61	245.26	0.000000
Conc*Solution	2	62.62	31.31	27.86	0.000000
Error	353	396.69	1.12		
Total	359	2184.32			



## 10. ANOVA avec trois facteurs

La méthode d'ANOVA avec trois facteurs ou plus (multifacteurs) est une généralisation de ce qui a été vu avec deux facteurs. Toutefois lorsqu'on a le même nombre d'observations pour chaque combinaison des facteurs (cellule), l'analyse statistique est grandement simplifiée. Dans les autres cas, par exemple avec des tailles inégales et des cellules sans observation (données manquantes), le traitement statistique est plus compliqué.

**Exemple 15 :** influence de 3 facteurs sur le temps d'apprentissage Y :  
 3 exemples de variable de réponse : Y1, Y2, Y3  
 facteur 1 : genre (homme, femme)  
 facteur 2 : age (jeune, moyen, agé)  
 facteur 3 : IQ (élevé, normal)

Kutner et all 5 ed. p 994, 999, 1001						
id	Genre	Age	IQ	Y1	Y2	Y3
1	homme	jeune	élevé	9	10.5	10
2	homme	moyen	élevé	12	12.5	12
3	homme	agé	élevé	18	16	15.5
4	homme	jeune	normal	19	17.5	18
5	homme	moyen	normal	20	19.5	20
6	homme	agé	normal	21	23	23.5
7	femme	jeune	élevé	9	9.5	10
8	femme	moyen	élevé	10	10.5	11
9	femme	agé	élevé	14	13	13.5
10	femme	jeune	normal	19	18.5	18
11	femme	moyen	normal	20	19.5	19
12	femme	agé	normal	21	22	21.5

### Modèle de TYPE CELLULE avec le même nombre d'observation dans chaque cellule

$$Y_{ijkl} = \mu_{ijk} + \varepsilon_{ijkl} \quad (139)$$

$\mu_{ijk}$  : paramètres - moyenne de la cellule (i, j, k)

$$\varepsilon_{ijkl} \sim N(0, \sigma^2)$$

$$i = 1, 2, \dots, a \quad j = 1, 2, \dots, b \quad k = 1, 2, \dots, c$$

$$l = 1, 2, \dots, n_{ijk} = n \quad N = abc n$$

**Notation** remarque : la sommation est faite sur l'indice représenté par un point ( . )

$$\begin{aligned}
 \mu_{i.j.} &= (1/c) \sum \mu_{ijk} & \mu_{i.k.} &= (1/b) \sum \mu_{ijk} \\
 \mu_{.j.k} &= (1/a) \sum \mu_{ijk} & \mu_{i..} &= (1/bc) \sum \sum \mu_{ijk} \\
 \mu_{.j..} &= (1/ac) \sum \sum \mu_{ijk} & \mu_{..k} &= (1/ab) \sum \sum \mu_{ijk} \\
 \mu_{...} &= (1/abc) \sum \sum \sum \mu_{ijk} & &
 \end{aligned} \quad (140)$$

**Modèle de TYPE EFFETS**

$$Y_{ijkl} = \mu_{...} + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijkl} \quad (141)$$

**effets principaux**

(142)

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \mu_{i..} - \mu_{...} & \sum \alpha_i &= 0 \\ \beta_j &= \mu_{.j.} - \mu_{...} & \sum \beta_j &= 0 \\ \gamma_k &= \mu_{..k} - \mu_{...} & \sum \gamma_k &= 0 \end{aligned}$$

**Interactions doubles**

(143)

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)_{ij} &= \mu_{ij.} - \mu_{i..} - \mu_{.j.} + \mu_{...} & \sum_i (\alpha\beta)_{ij} &= 0 & \sum_j (\alpha\beta)_{ij} &= 0 \\ (\alpha\gamma)_{ik} &= \mu_{i.k} - \mu_{i..} - \mu_{..k} + \mu_{...} & \sum_i (\alpha\gamma)_{jk} &= 0 & \sum_k (\alpha\gamma)_{jk} &= 0 \\ (\beta\gamma)_{jk} &= \mu_{.j.k} - \mu_{.j.} - \mu_{..k} + \mu_{...} & \sum_j (\beta\gamma)_{jk} &= 0 & \sum_k (\beta\gamma)_{jk} &= 0 \end{aligned}$$

**Interaction triple**

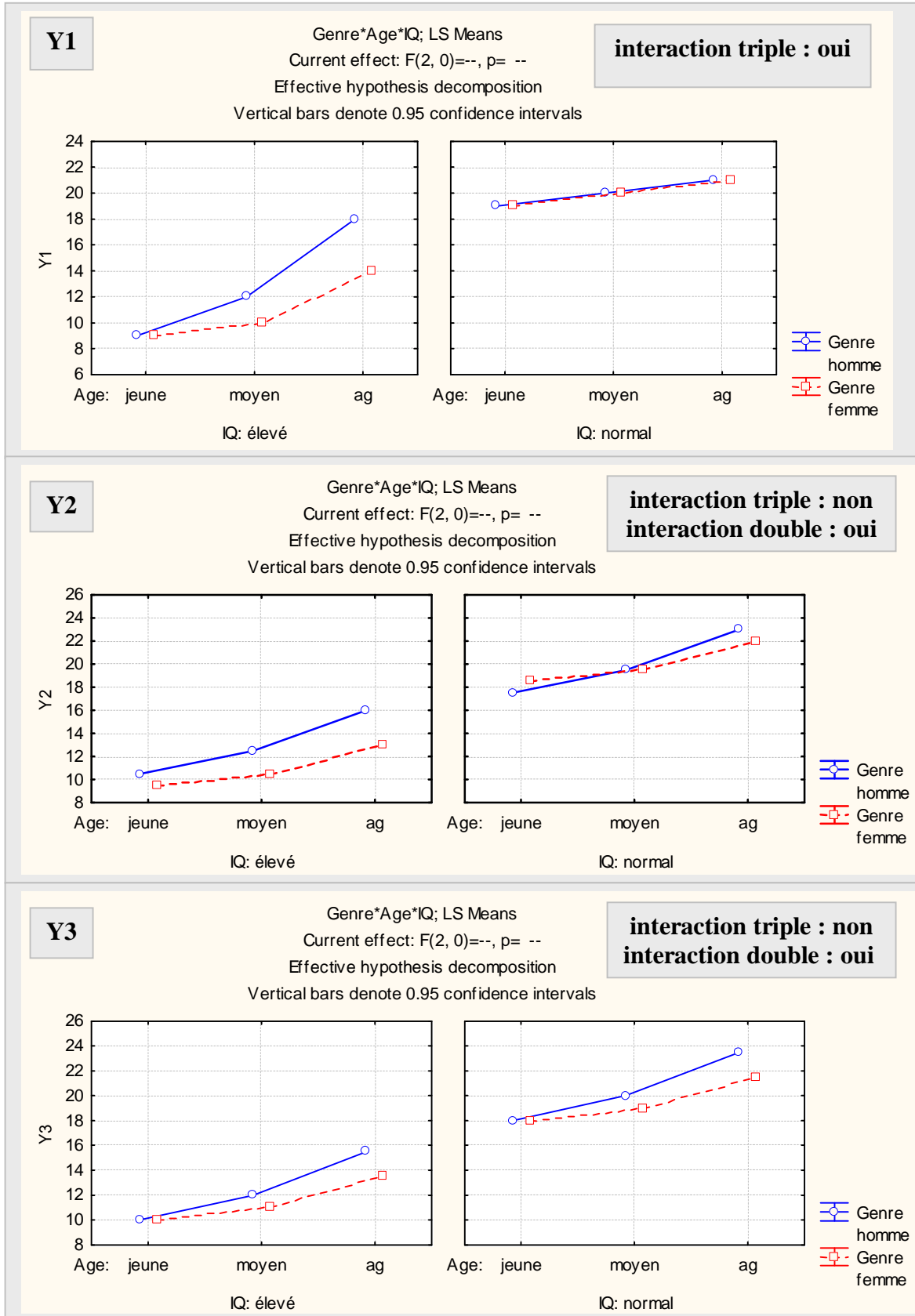
(144)

$$\begin{aligned} (\alpha\beta\gamma)_{ijk} &= \mu_{ijk} - [\mu_{...} + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk}] \\ &= \mu_{ijk} - (\mu_{ij.} + \mu_{i.k} + \mu_{.j.k}) + (\alpha_i + \beta_j + \gamma_k) - \mu_{...} \\ \sum_i (\alpha\beta\gamma)_{ijk} &= 0 & \text{pour tout } j, k \\ \sum_j (\alpha\beta\gamma)_{ijk} &= 0 & \text{pour tout } i, k \\ \sum_k (\alpha\beta\gamma)_{ijk} &= 0 & \text{pour tout } i, j \end{aligned}$$

**remarques**

- § les formes (139) et (141) sont équivalentes
- § la formulation (141) est plus utile sauf si, exceptionnellement, on peut montrer que la présence d'interactions doubles et triple est un artefact du choix de l'échelle pour mesurer la variable de réponse. Cela est plutôt rare.
- § C'est toujours une bonne idée de faire un examen graphique des données préalablement à l'analyse. Les graphiques d'interaction sont particulièrement révélateurs des effets.

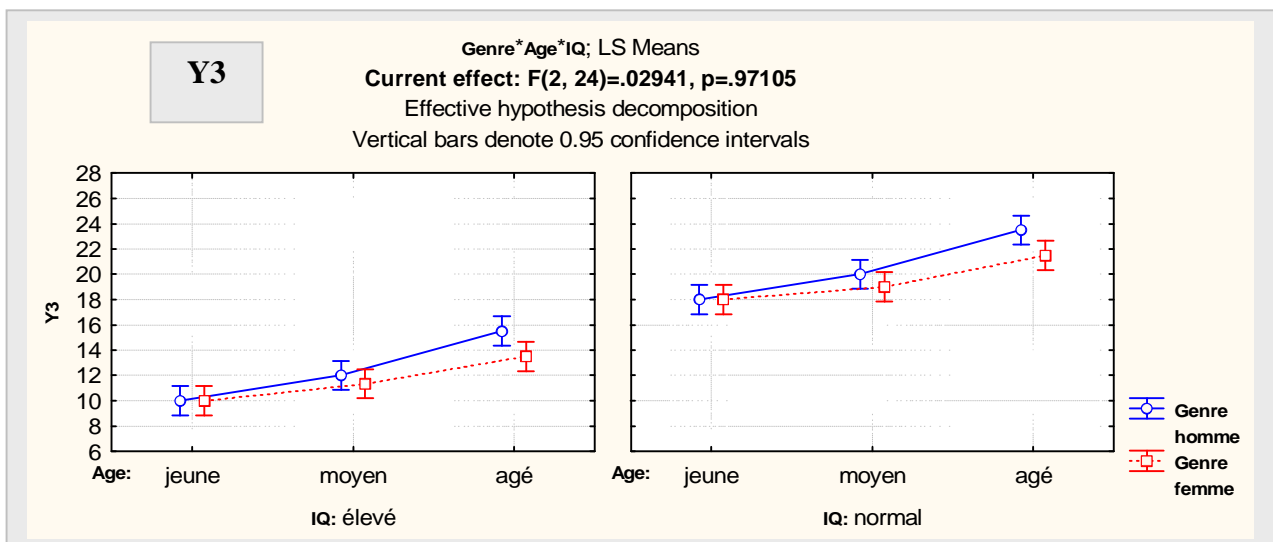
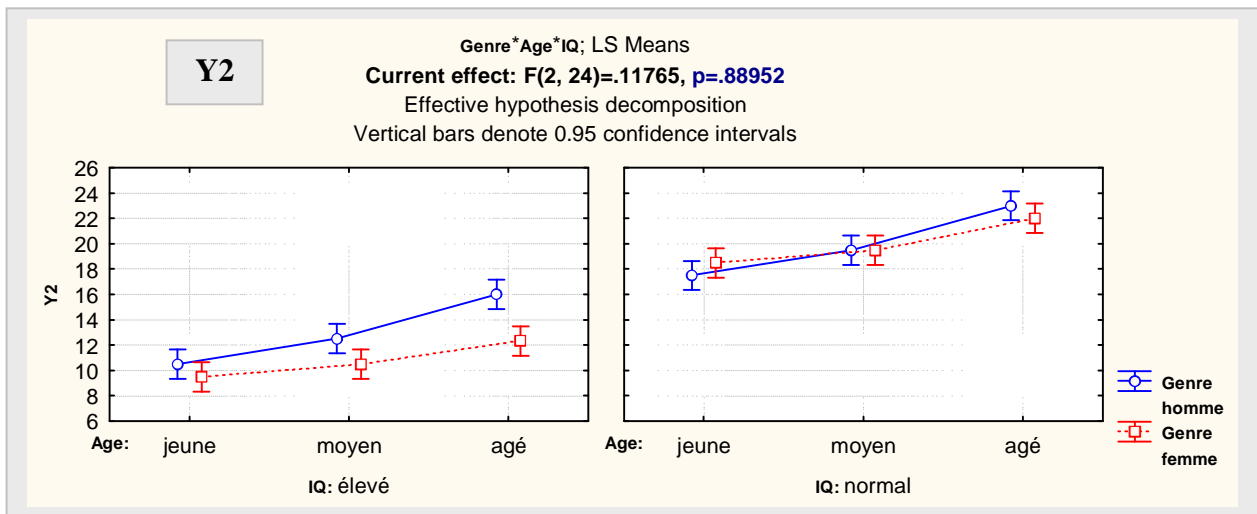
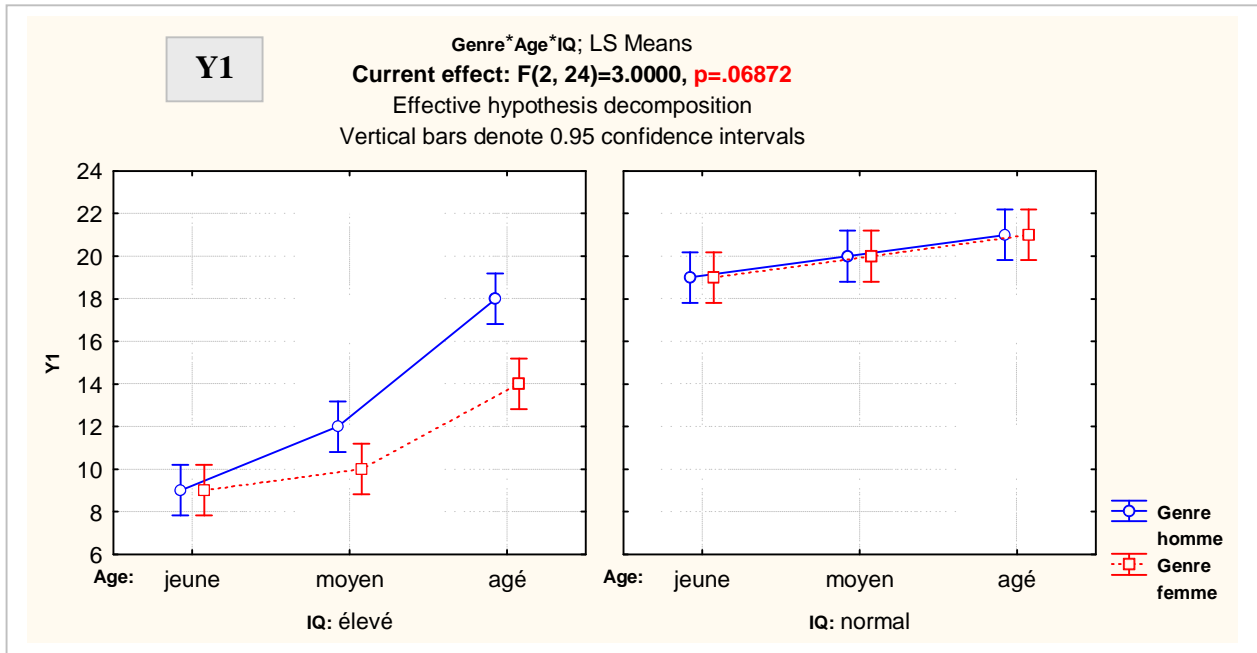
**Exemple 15 : examen des données et graphiques d'interaction – Y1, Y2, Y3**



**Exemple 16 : influence de 3 facteurs sur le temps d'apprentissage Y :**  
**données avec 2 répétitions sur 2 autres groupes d'individus**  
**3 exemples de variable de réponse : Y1, Y2, Y3**  
**facteur 1 : genre (homme, femme)**  
**facteur 2 : age (jeune, moyen, agé)**  
**facteur 3 : IQ (élevé, normal)**

Kutner et all 5 ed. p 994, 999, 1001 - rep = 1 représentent les données d'origine  
 rep = 2 et rep = 3 sont des données ajoutées  
 rep = 2 :  $Y(\text{rep}=2) = Y(\text{rep}=1) - 1$  et rep=3 :  $Y(\text{rep}=3) = Y(\text{rep}=1) + 1$

	rep	Genre	Age	IQ	Y1	Y2	Y3
1	1	homme	jeune	élevé	9	10.5	10.0
2	1	homme	moyen	élevé	12	12.5	12.0
3	1	homme	agé	élevé	18	16.0	15.5
4	1	homme	jeune	normal	19	17.5	18.0
5	1	homme	moyen	normal	20	19.5	20.0
6	1	homme	agé	normal	21	23.0	23.5
7	1	femme	jeune	élevé	9	9.5	10.0
8	1	femme	moyen	élevé	10	10.5	11.0
9	1	femme	agé	élevé	14	13.0	13.5
10	1	femme	jeune	normal	19	18.5	18.0
11	1	femme	moyen	normal	20	19.5	19.0
12	1	femme	agé	normal	21	22.0	21.5
13	2	homme	jeune	élevé	8	9.5	9.0
14	2	homme	moyen	élevé	11	11.5	11.0
15	2	homme	agé	élevé	17	15.0	14.5
16	2	homme	jeune	normal	18	16.5	17.0
17	2	homme	moyen	normal	19	18.5	19.0
18	2	homme	agé	normal	20	22.0	22.5
19	2	femme	jeune	élevé	8	8.5	9.0
20	2	femme	moyen	élevé	9	9.5	11.0
21	2	femme	agé	élevé	13	12.0	12.5
22	2	femme	jeune	normal	18	17.5	17.0
23	2	femme	moyen	normal	19	18.5	18.0
24	2	femme	agé	normal	20	21.0	20.5
25	3	homme	jeune	élevé	10	11.5	11.0
26	3	homme	moyen	élevé	13	13.5	13.0
27	3	homme	agé	élevé	19	17.0	16.5
28	3	homme	jeune	normal	20	18.5	19.0
29	3	homme	moyen	normal	21	20.5	21.0
30	3	homme	agé	normal	22	24.0	24.5
31	3	femme	jeune	élevé	10	10.5	11.0
32	3	femme	moyen	élevé	11	11.5	12.0
33	3	femme	agé	élevé	15	12.0	14.5
34	3	femme	jeune	normal	20	19.5	19.0
35	3	femme	moyen	normal	21	20.5	20.0
36	3	femme	agé	normal	22	23.0	22.5



**Ajustement du modèle : tableau des estimateurs des paramètres**

paramètre	estimateur
$\mu_{ijk}$	$\overline{Y}_{ijk.} = (1/n) \sum_l Y_{ijkl}$
$\mu_{ij.}$	$\overline{Y}_{ij..} = (1/nc) \sum_k \sum_l Y_{ijkl}$
$\mu_{i.k}$	$\overline{Y}_{i.k.} = (1/nb) \sum_j \sum_l Y_{ijkl}$
$\mu_{.jk}$	$\overline{Y}_{.jk.} = (1/na) \sum_i \sum_l Y_{ijkl}$
$\mu_{i..}$	$\overline{Y}_{i...} = (1/nbc) \sum_j \sum_k \sum_l Y_{ijkl}$
$\mu_{.j.}$	$\overline{Y}_{.j..} = (1/nac) \sum_i \sum_k \sum_l Y_{ijkl}$
$\mu_{..k}$	$\overline{Y}_{..k.} = (1/nab) \sum_i \sum_j \sum_l Y_{ijkl}$
$\mu_{...}$	$\overline{Y}_{....} = (1/nabc) \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l Y_{ijkl}$
$\alpha_i$	$\overline{Y}_{i...} - \overline{Y}_{....}$
$\beta_j$	$\overline{Y}_{.j..} - \overline{Y}_{....}$
$\gamma_k$	$\overline{Y}_{..k.} - \overline{Y}_{....}$
$(\alpha\beta)_{ij}$	$\overline{Y}_{ij..} - \overline{Y}_{i...} - \overline{Y}_{.j..} + \overline{Y}_{....}$
$(\alpha\gamma)_{ik}$	$\overline{Y}_{i.k.} - \overline{Y}_{i...} - \overline{Y}_{..k.} + \overline{Y}_{....}$
$(\beta\gamma)_{jk}$	$\overline{Y}_{.jk.} - \overline{Y}_{.j..} - \overline{Y}_{..k.} + \overline{Y}_{....}$
$(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$	$\overline{Y}_{ijk.} - \overline{Y}_{ij..} - \overline{Y}_{i.k.} - \overline{Y}_{.jk.} + \overline{Y}_{i...} + \overline{Y}_{.j..} + \overline{Y}_{..k.} - \overline{Y}_{....}$

$$\widehat{Y}_{ijkl} = \overline{Y}_{ijk.} \tag{145}$$

$$\text{résidu } e_{ijkl} = Y_{ijkl} - \widehat{Y}_{ijkl} \tag{146}$$

ANOVA

Source	SS	Df	MS	F	p-value
A	SSA	a - 1	MSA	MSA / MSE	
B	SSB	b - 1	MSB	MSB / MSE	
C	SSC	c - 1	MSC	MSC / MSE	
AB	SSAB	(a-1)(b-1)	MSAB	MSAB / MSE	
AC	SSAC	(a-1)(c-1)	MSAC	MSAC / MSE	
BC	SSBC	(b-1)(c-1)	MSBC	MSCB / MSE	
ABC	SSABC	(a-1)(b-1)(c-1)	MSABC	MSABC / MSE	
erreur	SSE	(n-1)abc	MSE	-----	
totale	SSTO	abcn - 1	-----	-----	

$$SSA = nbc \sum (\bar{Y}_{i...} - \bar{Y}_{....})^2 \tag{147}$$

$$SSB = nac \sum (\bar{Y}_{.j..} - \bar{Y}_{....})^2$$

$$SSC = nab \sum (\bar{Y}_{..k.} - \bar{Y}_{....})^2$$

$$SSAB = nc \sum \sum (\bar{Y}_{ij..} - \bar{Y}_{i...} - \bar{Y}_{.j..} + \bar{Y}_{....})^2 \tag{148}$$

$$SSAC = nb \sum \sum (\bar{Y}_{i.k.} - \bar{Y}_{i...} - \bar{Y}_{..k.} + \bar{Y}_{....})^2$$

$$SSBC = na \sum \sum (\bar{Y}_{.jk.} - \bar{Y}_{.j..} - \bar{Y}_{..k.} + \bar{Y}_{....})^2$$

$$SSABC = n \sum \sum \sum (\bar{Y}_{ijk.} - \bar{Y}_{ij..} - \bar{Y}_{i.k.} - \bar{Y}_{.jk.} + \bar{Y}_{i...} + \bar{Y}_{.j..} + \bar{Y}_{..k.} - \bar{Y}_{....})^2 \tag{149}$$

$$SSE = \sum \sum \sum \sum (Y_{ijkl} - \bar{Y}_{.ijk.})^2 \tag{150}$$

$$SSTO = \sum \sum \sum \sum (Y_{ijkl} - \bar{Y}_{....})^2 \tag{151}$$

Tests d'hypothèses

$$H_0 : (\alpha\beta\gamma)_{ijk} = 0 \quad \text{vs} \quad H_a : \text{pas tous les } (\alpha\beta\gamma)_{ijk} \text{ sont nuls} \tag{152}$$

On rejette  $H_0$  si  $MSABC / MSE > F(1 - \alpha ; (a-1)(b-1)(c-1), (n-1)abc)$

On peut aussi tester les hypothèses sur la nullité des intractions doubles avec les ratios F du tableau d'analyse de la variance.



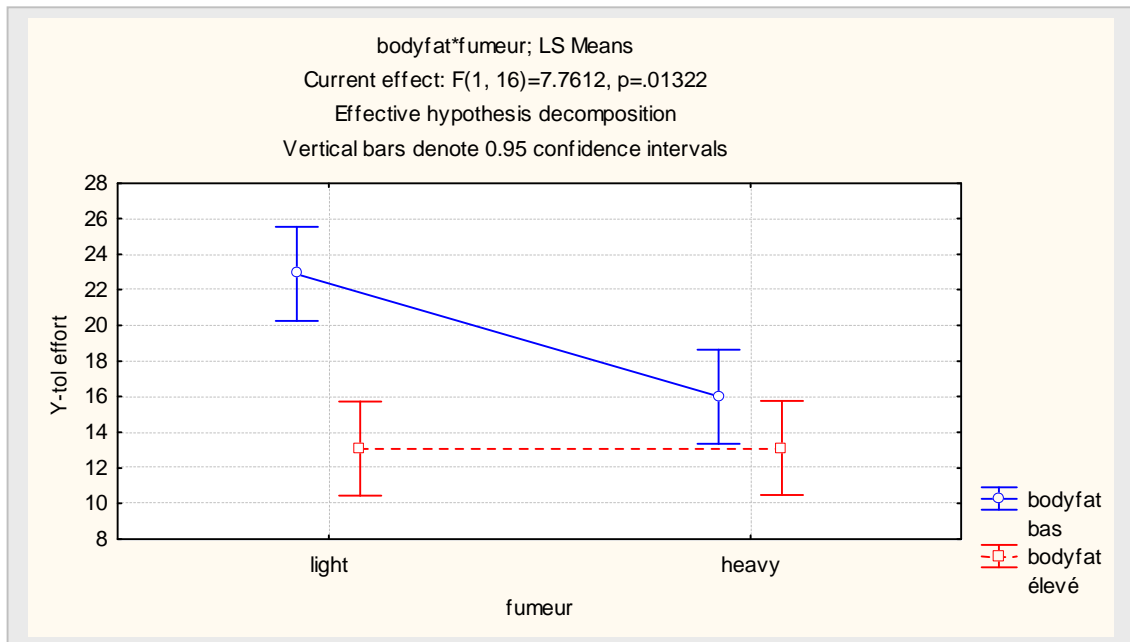
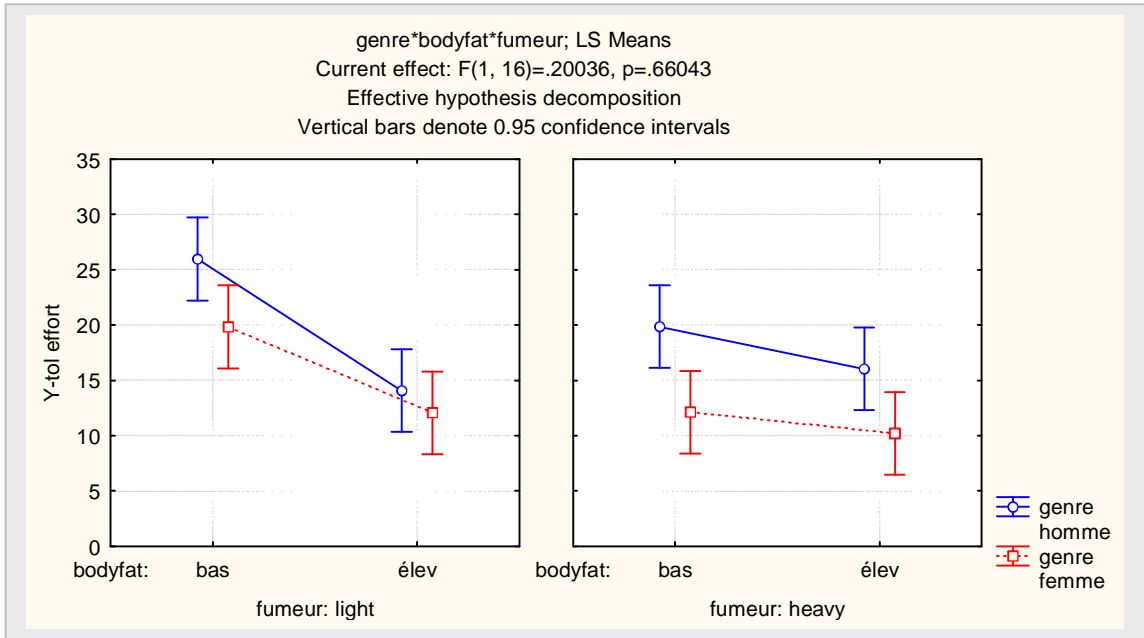
**Exemple 17** : effet de 3 facteurs sur la tolérance à l'exercice

**Kutner et all 5 ed. p 1004**

	genre	bodyfat	fumeur	rep	Y-tol effort
1	homme	bas	light	1	24.1
2	homme	bas	light	2	29.2
3	homme	bas	light	3	24.6
4	femme	bas	light	1	20.0
5	femme	bas	light	2	21.9
6	femme	bas	light	3	17.6
7	homme	élevé	light	1	14.6
8	homme	élevé	light	2	15.3
9	homme	élevé	light	3	12.3
10	femme	élevé	light	1	16.1
11	femme	élevé	light	2	9.3
12	femme	élevé	light	3	10.8
13	homme	bas	heavy	1	17.6
14	homme	bas	heavy	2	18.8
15	homme	bas	heavy	3	23.2
16	femme	bas	heavy	1	14.8
17	femme	bas	heavy	2	10.3
18	femme	bas	heavy	3	11.3
19	homme	élevé	heavy	1	14.9
20	homme	élevé	heavy	2	20.4
21	homme	élevé	heavy	3	12.8
22	femme	élevé	heavy	1	10.1
23	femme	élevé	heavy	2	14.4
24	femme	élevé	heavy	3	6.1

**ANOVA**

	DF	SS	MS	F	p-value
Intercept	1	6353.76	6353.76	680.61	<b>0.0000</b>
genre	1	176.58	176.58	18.92	<b>0.0005</b>
bodyfat	1	242.57	242.57	25.98	<b>0.0001</b>
fumeur	1	70.38	70.38	7.54	<b>0.0144</b>
genre*bodyfat	1	13.65	13.65	1.46	0.2441
genre*fumeur	1	11.07	11.07	1.19	0.2923
bodyfat*fumeur	1	72.45	72.45	7.76	<b>0.0132</b>
genre*bodyfat*fumeur	1	1.87	1.87	0.20	0.6604
Error	16	149.37	9.34		
Total	23	737.95			



### Stratégie et modélisation

**M1 : modèle complet avec interaction doubles et interaction triple - équation (141)**

**M2 : modèle réduit avec 3 interactions doubles mais sans interaction triple**

**M3 : modèle réduit avec 1 ou 2 intractions double**

**M4 : modele avec effets principaux seulement**

**INTERACTION TRIPLE SIGNIFICATIVE ET IMPORTANTE ?**

**OUI : la variable de réponse doit être analysée avec le modèle à moyenne de cellules : M1**

**NON : INTERACTIONS DOUBLES SIGNIFICATIVE ET IMPORTANTES ?**

**OUI : la variable de réponse doit être analysée avec le modèle réduit (sans le terme d'interaction triple) de moyennes à cellules : M2 ou M3**

**NON : la variable de réponse peut être interprétée avec le modèle à effets principaux seulement : M4**

**le modèle final retenu devrait respecter le principe de la hiérarchie**

**si une interaction est présente (car significative et importante)**

**il est recommandé de mettre dans l'équation de prédiction les**

**effets principaux correspondants même s'il ne sont pas tous significatifs.**

#### Exemple 17 : suite

ANOVA					
	SS	DF	MS	F	p
Intercept	6353.76	1	6353.76	714.20	0.0000
genre	176.58	1	176.58	19.85	0.0003
bodyfat	242.57	1	242.57	27.27	0.0001
fumeur	70.38	1	70.38	7.91	0.0120
genre*bodyfat	13.65	1	13.65	1.53	0.2323
genre*fumeur	11.07	1	11.07	1.24	0.2801
bodyfat*fumeur	72.45	1	72.45	8.14	0.0110
Error	151.24	17	8.90		

**Modèle final :  $Y = \text{gen} + \text{genre} + \text{bodyfat} + \text{fumeur} + \text{bodyfat}*\text{fumeur}$**

**Les procédures de Tukey, Scheffé et Bonferroni s'appliquent pour tester des contrastes pour les effets. Consulter Kutner et all 5 ed. pp. 1014-1019**

**Quoi faire si les tailles  $n_{ijk}$  sont (très) inégales mais  $> 0$ ?**

Réponse : employer l'approche par régression avec des variables indicatrices

**Exemple 17** : données de l'exemple 16 avec des données non équilibrées Y2

Kutner et all 5 ed. p 1004

id	genre	bodyfat	fumeur	rep	Y tol effort	Y2	v7	Xg	Xb	Xf	XgXb	XgXf	XbXf	XgXbXf
1	homme	bas	light	1	24.1	24.1		1	-1	-1	-1	-1	1	1
2	homme	bas	light	2	29.2	29.2		1	-1	-1	-1	-1	1	1
3	homme	bas	light	3	24.6			1	-1	-1	-1	-1	1	1
4	femme	bas	light	1	20.0	20.0		-1	-1	-1	1	1	1	-1
5	femme	bas	light	2	21.9			-1	-1	-1	1	1	1	-1
6	femme	bas	light	3	17.6			-1	-1	-1	1	1	1	-1
7	homme	élevé	light	1	14.6	14.6		1	1	-1	1	-1	-1	-1
8	homme	élevé	light	2	15.3	15.3		1	1	-1	1	-1	-1	-1
9	homme	élevé	light	3	12.3	12.3		1	1	-1	1	-1	-1	-1
10	femme	élevé	light	1	16.1	16.1		-1	1	-1	-1	1	-1	1
11	femme	élevé	light	2	9.3	9.3		-1	1	-1	-1	1	-1	1
12	femme	élevé	light	3	10.8			-1	1	-1	-1	1	-1	1
13	homme	bas	heavy	1	17.6	17.6		1	-1	1	-1	1	-1	-1
14	homme	bas	heavy	2	18.8			1	-1	1	-1	1	-1	-1
15	homme	bas	heavy	3	23.2			1	-1	1	-1	1	-1	-1
16	femme	bas	heavy	1	14.8	14.8		-1	-1	1	1	-1	-1	1
17	femme	bas	heavy	2	10.3	10.3		-1	-1	1	1	-1	-1	1
18	femme	bas	heavy	3	11.3			-1	-1	1	1	-1	-1	1
19	homme	élevé	heavy	1	14.9	14.9		1	1	1	1	1	1	1
20	homme	élevé	heavy	2	20.4	20.4		1	1	1	1	1	1	1
21	homme	élevé	heavy	3	12.8	12.8		1	1	1	1	1	1	1
22	femme	élevé	heavy	1	10.1	10.1		-1	1	1	-1	-1	1	-1
23	femme	élevé	heavy	2	14.4	14.4		-1	1	1	-1	-1	1	-1
24	femme	élevé	heavy	3	6.1			-1	1	1	-1	-1	1	-1

**Regression Summary for Dependent Variable: Y2**  
**R= 0.885 R<sup>2</sup>= 0.783 Adjusted R<sup>2</sup>= 0.594 F(7,8)=4.1382 p**

	Beta	Std.Err.	B	Std.Err.	t(8)	p-level
Intercept			16.4813	0.91187	18.0741	<b>0.00000</b>
Xg	0.40712	0.17626	2.1063	0.91187	2.3098	<b>0.04970</b>
Xb	-0.51285	0.17201	- 2.7188	0.91187	-2.9815	<b>0.01756</b>
Xf	-0.36488	0.17765	- 1.8729	0.91187	-2.0539	<b>0.07406</b>
XgXb	-0.15826	0.17626	- 0.8188	0.91187	-0.8979	0.39547
XgXf	0.01973	0.17626	0.1021	0.91187	0.1119	0.91362
XbXf	0.43875	0.17765	2.2521	0.91187	2.4697	<b>0.03873</b>
XgXbXf	0.09705	0.17626	0.5021	0.91187	0.5506	0.59694

Conclusion : l'interprétation est analogue à celle basée sur le modèle retenu avec toutes les données.

## 11. Modélisation avec quatre facteurs et plus

On peut supposer que dans ces circonstances on est en présence de données observationnelles historiques et non pas de données résultant d'une expérimentation planifiée dont le but est de tester l'influence de quelques facteurs contrôlés. En présence de nombreux facteurs, l'objectif de l'étude est plutôt de nature exploratoire et on cherche à identifier un ou plusieurs « bons » modèles pour représenter et synthétiser l'ensemble des données. Cette recherche de modèles est aussi connue sous le nom de « méthodes de sélection de variables » et elles ont été abondamment développées dans la littérature statistique.

### Problème de la multicollinéarité

Avec de nombreux facteurs (prédicteurs ou variables explicatives) il y a une possibilité très réelle que plusieurs d'entre elles présentent des corrélations assez élevées et cela conduit à de mauvaises estimations des coefficients du modèle. Le problème se présente lorsque le modèle de régression multiple est significatif mais aucun des coefficients du modèle n'est significatif. On remarque alors une grande différence entre le  $R^2$  et le  $R^2$  ajusté.

#### Exemple 18 : huit facteurs affectant le prix de voitures (Y)

NOM	CYL	PUIS	LON	LAR	POIDS	VITESSE	NAT	FINITION	Y-PRIX
ALFASUD-TI-1350	1350	79	393	161	870	165	I	B	30570
AUDI-100-L	1588	85	468	177	1110	160	D	TB	39990
SIMCA-1307-GLS	1294	68	424	168	1050	152	F	M	29600
CITROEN-GS-CLUB	1222	59	412	161	930	151	F	M	28250
FIAT-132-1600GLS	1585	98	439	164	1105	165	I	B	34900
LANCIA-BETA-1300	1297	82	429	169	1080	160	I	TB	35480
PEUGEOT-504	1796	79	449	169	1160	154	F	B	32300
RENAULT-16-TL	1565	55	424	163	1010	140	F	B	32000
RENAULT-30-TS	2664	128	452	173	1320	180	F	TB	47700
TOYOTA-COROLLA	1166	55	399	157	815	140	J	M	26540
ALFETTA-1.66	1570	109	428	162	1060	175	I	TB	42395
PRINCESS-1800-HL	1798	82	445	172	1160	158	GB	B	33990
DATSUN-200L	1998	115	469	169	1370	160	J	TB	43980
TAUNUS-2000-GL	1993	98	438	170	1080	167	D	B	35010
RANCHO	1442	80	431	166	1129	144	F	TB	39450
MAZDA-9295	1769	83	440	165	1095	165	J	M	27900
OPEL-REKORD-L	1979	100	459	173	1120	173	D	B	32700
LADA-1300	1294	68	404	161	955	140	U	M	22100

référence : <http://cedric.cnam.fr/~saporta/multicol.pdf> (page 2)

Analysis of Variance; DV: PRIX					
	SS	df	MS	F	p-level
Regress.	520591932	6	86765322	4.469	0.015603
Residual	213563858	11	19414896		
Total	734155790				

**Regression Summary for Dependent Variable: Y-PRIX (Prix voitures.sta) R= .84208242**  
**R<sup>2</sup>= 0.70910281 Adjusted R<sup>2</sup>= 0.55043161 F(6,11)=4.469 p= 0.0156**

	Beta	Std.Err.	B	Std.Err.	t(11)	p-level
Intercept			-8239.36	42718.42	-0.192876	0.850571
CYL	-0.199449	0.315835	-3.51	5.55	-0.631497	0.540617
PUIS	0.874912	0.542254	282.17	174.88	1.613472	0.134938
LON	-0.050588	0.436482	-15.04	129.75	-0.115899	0.909821
LAR	0.168747	0.333176	208.69	412.05	0.506479	0.622518
POIDS	0.262068	0.513149	12.57	24.62	0.510705	0.619651
VITESSE	-0.205272	0.410598	-111.11	222.26	-0.499934	0.626971

Globalement la régression est significative ( **0.0156** ) mais aucun coefficient du modèle est significatif !

On peut détecter la multicolinéarité avec

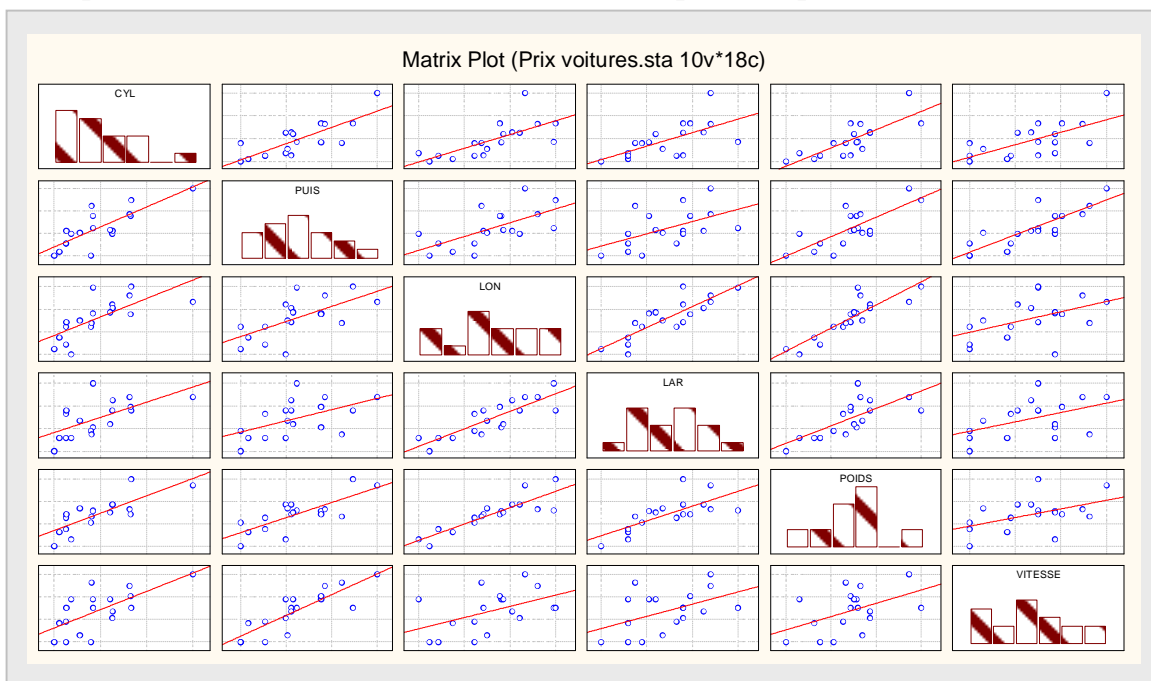
- § l'étude de la matrice des corrélations
- § le calcul des facteurs d'inflation de la variance VIF

$$VIF(\text{variable } j) = 1 / (1 - R^2(\text{variable } j \mid \text{autres variables})) \tag{153}$$

**R<sup>2</sup> : corrélation multiple de la variable j sur les autres variables**

correlations						
	CYL	PUIS	LON	LAR	POIDS	VITESSE
CYL	1.00	0.80	0.70	0.63	0.79	0.66
PUIS	0.80	1.00	0.64	0.52	0.77	0.84
LON	0.70	0.64	1.00	0.85	0.87	0.48
LAR	0.63	0.52	0.85	1.00	0.72	0.47
POIDS	0.79	0.77	0.87	0.72	1.00	0.48
VITESSE	0.66	0.84	0.48	0.47	0.48	1.00

On remarque une corrélation assez élevée ( > 0.70 ) entre plusieurs paires de variables.



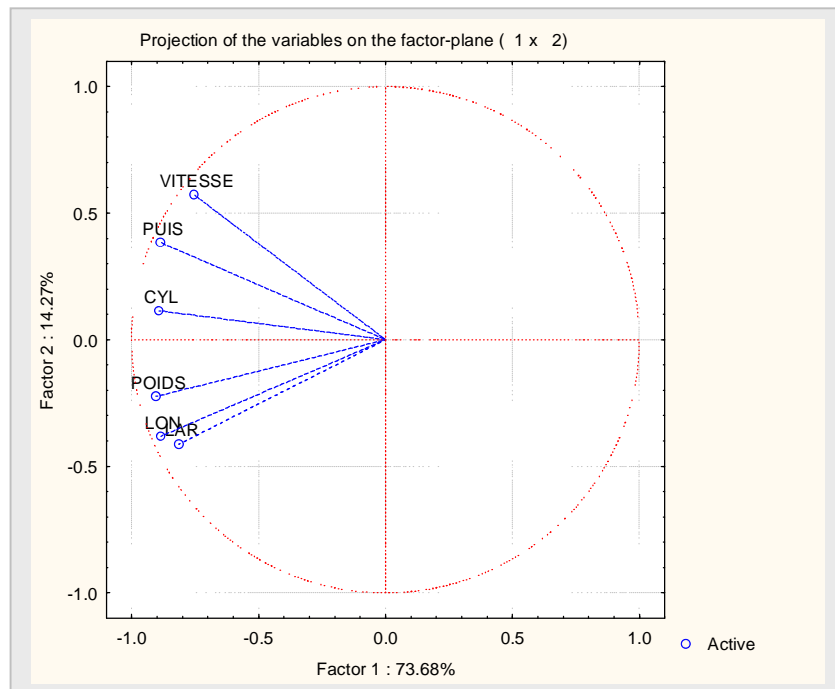
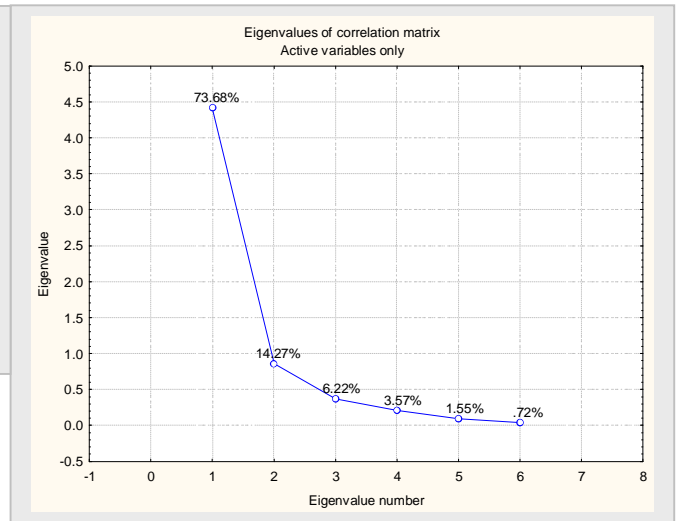
**Redundancy of Independent Variables; DV: PRIX**  
**R-square column contains R-square of respective variable with all other independent variables**

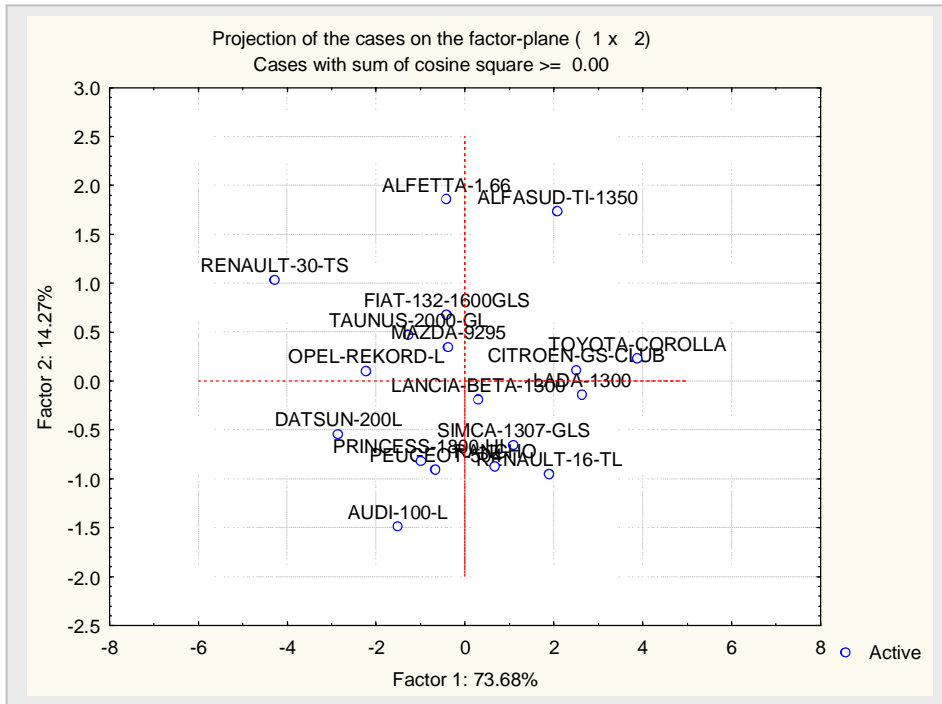
	Toleran.	R-square	Partial	Semipart
<b>CYL</b>	<b>0.27</b>	<b>0.73</b>	<b>-0.19</b>	<b>-0.10</b>
<b>PUIS</b>	<b>0.09</b>	<b>0.91</b>	<b>0.44</b>	<b>0.26</b>
<b>LON</b>	<b>0.14</b>	<b>0.86</b>	<b>-0.03</b>	<b>-0.02</b>
<b>LAR</b>	<b>0.24</b>	<b>0.76</b>	<b>0.15</b>	<b>0.08</b>
<b>POIDS</b>	<b>0.10</b>	<b>0.90</b>	<b>0.15</b>	<b>0.08</b>
<b>VITESSE</b>	<b>0.16</b>	<b>0.84</b>	<b>-0.15</b>	<b>-0.08</b>

Une analyse en composante principale (ACP) montrent que ces 6 variables sont très bien expliquées par les 2 premières composantes principales avec un pourcentage de 88%.

**Eigenvalues of correlation matrix, and related statistics**  
**Active variables only**

	Eigenvalue	% Total	Cumulative	Cumulative
<b>1</b>	<b>4.421</b>	<b>73.68</b>	<b>4.42</b>	<b>73.7</b>
<b>2</b>	<b>0.856</b>	<b>14.27</b>	<b>5.28</b>	<b>87.9</b>
<b>3</b>	<b>0.373</b>	<b>6.22</b>	<b>5.65</b>	<b>94.2</b>
<b>4</b>	<b>0.214</b>	<b>3.57</b>	<b>5.86</b>	<b>97.7</b>
<b>5</b>	<b>0.093</b>	<b>1.55</b>	<b>5.96</b>	<b>99.3</b>
<b>6</b>	<b>0.043</b>	<b>0.72</b>	<b>6.00</b>	<b>100.0</b>





**Critères pour comparer des modèles avec k effets**

§ maximiser  $R^2$  ajusté =  $1 - [(n - 1) / (n - k)] (1 - R^2)$  (154)  
 =  $1 - (\hat{\sigma}^2 / s_y^2)$  équivalent à minimiser  $\hat{\sigma}^2$

§ viser un Cp de Mallows proche de k + 1

$Cp = (SSE / \hat{\sigma}^2) + 2k + 2 - n$  (155)

§ Maximiser AIC (Akaike Information Criterion)

$AIC = - 2 \cdot \ln(L) + 2(k+1) = n \ln(SSE / n) + 2(k+1) + n(1/n + 1)$  (156)

L : fonction de vraisemblance



**Algorithmes de sélection**

§ dénombrement exhaustif :  $2^p - 1$  modèles

<b>p</b>	<b>6</b>	<b>10</b>	<b>15</b>	<b>20</b>	<b>30</b>	<b>50</b>
$2^p - 1$	63	1023	32767	1 048 575	$10^{10}$	$10^{15}$

§ méthodes pas à pas (« stepwise »)

ascendante (« forward »), descendante (« backward »), ...

**Exemple 18 : suite**

Regression Summary for Dependent Variable: PRIX						
R= .7987 R <sup>2</sup> = .6379 Adjusted R <sup>2</sup> = .6153 F(1,16)=28.189						
backward						
	Beta	Std.Err.	B	Std.Err.	t(16)	p-level
Intercept			12364	4215.9	2.9326	0.0098
PUIS	0.7987	0.1504	258	48.5	5.3094	0.0001

Regression Summary for Dependent Variable: Y-PRIX						
R= .8286 R <sup>2</sup> = .6866 Adjusted R <sup>2</sup> = .6448 F(2,15)=16.433						
forward						
	Beta	Std.Err.	B	Std.Err.	t(15)	p-level
Intercept			1775.6	8031.0	0.2211	0.8280
PUIS	0.5363	0.2246	173.0	72.4	2.3884	0.0305
POIDS	0.3429	0.2246	16.5	10.8	1.5269	0.1476

**Autres stratégies de modélisation avec toutes les variables**

§ régression sur les composantes principales :

prédiction appochée en éliminant les petites valeurs propres

les composantes principales font l'extraction du maximum de variance des prédicteurs sans tenir compte de Y ;

§ régression PLS (Partial Least Square) (H. S. Wold)

semblable à la régression sur composantes principales mais les composantes PLS sont optimisées pour être prédictives de Y ;

la régression PLS donne en pratique de bonnes prévisions même si le nombre d'observations est petit et le nombre de variables est grand

§ régression de type ridge (Hoerl et Kennard)

§ Méthodes du DATA MINING.

**Régression sur variables qualitatives**

On recode les modalités en variables indicatrices.

Puisque la somme des indcatrices vaut 1, on élimine une modalité.

On peut introduire des variables d'interaction avec le produit des variables indicatrices associées aux différentes variables qualitatives.

Voir un exemple à la page 15.

## 12. Design (plan) en mesures répétées

Le *design en mesures répétées* utilise le même sujet (personne, animal, famille, morceau de terrain, magasins, villes, plantes....) pour chacun des traitements sous étude. Les sujets servent de blocs et les unités expérimentales à l'intérieur d'un bloc peuvent être vues comme différentes occasions lorsque l'on applique un traitement à un sujet. Les designs en mesures répétées sont beaucoup employés dans les sciences du comportement et dans les sciences du vivant. Parmi les designs très employés, il y a le design « crossover » et le design à parcelles divisées (« split-plot »).

**Exemple** : on étudie l'impact de 2 campagnes publicitaires dans 15 régions géographiques. Elles constituent les sujets. Dans chaque région, on randomise l'ordre de la campagne publicitaire. On attend une certaine période de temps (« washout period ») entre les deux campagnes.

**Exemple** : des individus (sujets) souffrant de migraines reçoivent 2 traitements : un nouveau médicament (A) et un traitement placebo (P). L'ordre dans lequel ils reçoivent les 2 traitements est randomisé. La moitié des sujets reçoivent les traitements dans l'ordre AP tandis que l'autre moitié ils reçoivent les traitements dans l'ordre PA.

Le design est identifié sous le vocable de *design en mesures répétées* car le même sujet reçoit plusieurs traitements et il est mesuré pour chaque traitement. Il ne faut pas confondre le concept de mesures répétées avec le concept de répétition. Dans ce dernier cas le sujet est mesuré plusieurs fois pour le même traitement.

### Avantages du design en mesures répétées

- § La variabilité inter sujet est exclue de l'erreur expérimentale, donc il est plus facile de comparer les traitements entre eux.
- § Chaque sujet sert comme son propre contrôle.
- § Économie du nombre de sujets.

### Désavantages du design en mesures répétées

- § Exige une période d'attente entre les traitements à cause des phénomènes d'accoutumance (posologie en médecine), d'apprentissage (tests sur des humains), ou d'accumulation (traitements chimiques en agriculture).
- § Effets d'interférence :
  - effet de l'ordre
  - effet de passage entre deux traitements consécutifs (« carryover »).
- § Les variables de réponses sont dépendantes.

La solution pour contrer les effets d'interférence :  
on randomise, pour chaque sujet, l'ordre d'assignation des traitements.

**Tableau général des données d'un design à mesures répétées**

sujet	temps (époque)	indicateur donnée manquante	réponse Y	covariables continues		facteurs qualitatifs	
				X	W....	A	B.....
1	1	$\delta_{11}$	$Y_{11}$	$X_{11}$	$W_{11}$ ...	$A_{11}$	$B_{11}$ ....
	2	$\delta_{12}$	$Y_{12}$	$X_{12}$	$W_{12}$ ...	$A_{12}$	$B_{12}$ ....
	...	....	....	....	....	....	....
	j	$\delta_{1j}$	$Y_{1j}$	$X_{1j}$	$W_{1j}$ ...	$A_{1j}$	$B_{1j}$ ....
	...	....	....	....	....	....	....
	$t_1$	$\delta_{1 t_1}$	$Y_{1 t_1}$	$X_{1 t_1}$	$W_{1 t_1}$ ...	$A_{1 t_1}$	$B_{1 t_1}$ ....
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
i	1	$\delta_{i1}$	$Y_{i1}$	$X_{i1}$	$W_{i1}$ ...	$A_{i1}$	$B_{i1}$ ....
	...	....	....	....	....	....	....
	j	$\delta_{ij}$	$Y_{ij}$	$X_{ij}$	$W_{ij}$ ...	$A_{ij}$	$B_{ij}$ ....
	...	....	....	....	....	....	....
	$t_i$	$\delta_{i t_i}$	$Y_{i t_i}$	$X_{i t_i}$	$W_{i t_i}$ ...	$A_{i t_i}$	$B_{i t_i}$ ....
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
n	1	$\delta_{n1}$	$Y_{n1}$	$X_{n1}$	$W_{n1}$ ...	$A_{n1}$	$B_{n1}$ ....
	...	....	....	....	....	....	....
	j	$\delta_{nj}$	$Y_{nj}$	$X_{nj}$	$W_{nj}$ ...	$A_{nj}$	$B_{nj}$ ....
	...	....	....	....	....	....	....
	$t_n$	$\delta_{n t_n}$	$Y_{n t_n}$	$X_{n t_n}$	$W_{n t_n}$ ...	$A_{n t_n}$	$B_{n t_n}$ ....

Le temps (observations en occasions multiples) peut être remplacé par des observations sous plusieurs conditions ; par exemple l'espace.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si toutes les données de Y, X, W, ..., A, B, ... sont disponibles} \\ 0 & \text{autrement (données manquantes)} \end{cases}$$

observations dépendantes

rôle : sert à classer les données en sous groupes

2 approches pour faire l'analyse statistique :

- § **approche unidimensionnelle** : les données répétées de la réponse de chaque sujet sont résumées une seule nouvelle variable de réponse par une transformation appropriée : par exemple une pente de moindres carrés sur les données (t,Y) ;
- § **approche multidimensionnelle** : les données répétées sont considérées comme plusieurs variables de réponse dépendantes ; dans ce cas il est préférable d'organiser les données avec autant de variables de réponse Y qu'il y a de mesures répétées. Les exemples montrent l'organisation des fichiers de données pour faire l'analyse.

**Exemple 19 : Y= évaluation (sur 40) de 4 bouteilles de vin par 6 juges**

Kutner et al 5 ed. p. 1132

id	juge	vin id	Y-rang	v4	Y-vin1	Y-vin2	Y-vin3	Y-vin4
1	A	1	20		20	24	28	28
2	A	2	24					
3	A	3	28					
4	A	4	28					
5	B	1	15		15	18	23	24
6	B	2	18					
7	B	3	23					
8	B	4	24					
9	C	1	18		18	19	24	23
10	C	2	19					
11	C	3	24					
12	C	4	23					
13	D	1	26		26	26	30	30
14	D	2	26					
15	D	3	30					
16	D	4	30					
17	E	1	22		22	24	28	26
18	E	2	24					
19	E	3	28					
20	E	4	26					
21	F	1	19		19	21	27	25
22	F	2	21					
23	F	3	27					
24	F	4	25					

**Exemple 20 : poids de 16 rats de laboratoire jour 1, 8, 15, ..., 64 - 3 diètes (A, B, C)**

Crowder and Hand 1990 p.19 - Analysis of Repeated Measures expérience sur 16 rats - 3 diètes - Y-poids en grammes à jour = 1, 8, ..., 64														
id	diète	sujet	Y-poids jour 1	Y-poids jour 8	Y-poids jour 15	Y-poids jour 22	Y-poids jour 29	Y-poids jour 36	y-poids jour 43	Y-poids jour 44	Y-poids jour 50	Y-poids jour 57	Y-poids jour 64	pente régression
1	A	1	240	250	255	260	262	258	266	266	265	272	278	0.484
2	A	2	225	230	230	232	240	240	243	244	238	247	245	0.330
3	A	3	245	250	250	255	262	265	267	267	264	268	269	0.398
4	A	4	260	255	255	265	265	268	270	272	274	273	275	0.330
5	A	5	255	260	255	270	270	273	274	273	276	278	280	0.406
6	A	6	260	265	270	275	275	277	278	278	284	279	281	0.318
7	A	7	275	275	260	270	273	274	276	271	282	281	284	0.202
8	A	8	245	255	425	268	270	265	265	267	273	274	278	0.409
9	B	9	410	415	425	428	448	443	442	446	456	468	478	1.011
10	B	10	405	420	430	440	448	460	458	464	475	484	496	1.341
11	B	11	445	445	450	452	455	455	451	450	462	466	472	0.363
12	B	12	555	560	565	580	590	597	595	595	612	618	628	1.148
13	C	13	470	465	475	485	487	493	493	504	507	518	525	0.919
14	C	14	535	525	530	533	535	540	525	530	543	544	559	0.315
15	C	15	520	525	530	540	543	546	538	544	553	555	548	0.493
16	C	16	510	510	520	515	530	538	535	542	550	553	569	0.905

**Exemple 21 : afflux de sang (« blood flow » 8 rats de laboratoire  
4 font de l'exercice et 4 n'en font pas**

Kutner et all 5ed p. 1150										
id	Exercice	sujet	body	Y-blod flow	v5	Y-bf bone	Y-bf brain	Y-bf skin	Y-bf muscle	Y-bf heart
1	non	1	bone	4		4	3	5	5	4
2	non	1	brain	3						
3	non	1	skin	5						
4	non	1	muscle	5						
5	non	1	heart	4						
6	non	2	bone	1		1	3	6	3	8
7	non	2	brain	3						
8	non	2	skin	6						
9	non	2	muscle	3						
10	non	2	heart	8						
11	non	3	bone	3		3	1	4	4	7
12	non	3	brain	1						
13	non	3	skin	4						
14	non	3	muscle	4						
15	non	3	heart	7						
16	non	4	bone	1		1	4	3	2	7
17	non	4	brain	4						
18	non	4	skin	3						
19	non	4	muscle	2						
20	non	4	heart	7						
21	oui	5	bone	3		3	6	12	22	11
22	oui	5	brain	6						
23	oui	5	skin	12						
24	oui	5	muscle	22						
25	oui	5	heart	11						
26	oui	6	bone	3		3	5	8	18	12
27	oui	6	brain	5						
28	oui	6	skin	8						
29	oui	6	muscle	18						
30	oui	6	heart	12						
31	oui	7	bone	4		4	7	10	20	14
32	oui	7	brain	7						
33	oui	7	skin	10						
34	oui	7	muscle	20						
35	oui	7	heart	14						
36	oui	8	bone	2		2	4	7	16	8
37	oui	8	brain	4						
38	oui	8	skin	7						
39	oui	8	muscle	16						
40	oui	8	heart	8						

**Expérience en mesures répétées sur tous les traitements d'un facteur fixe**

**Modèle** 
$$Y_{ij} = \mu + \rho_i + \tau_j + \varepsilon_{ij} \quad (157)$$
  

$$i = 1, 2, \dots, s \quad \text{et} \quad j = 1, 2, \dots, = n$$

où  $\mu \dots$  : effet général  
 $\rho_i$  : effet aléatoire du sujet  $i$  - indépendantes et  $N(0, \sigma_\rho^2)$   
 $\tau_j$  : effet différentiel de la modalité  $j$  du facteur fixe et  $\sum \tau_j = 0$   
 $\varepsilon_{ij}$  : erreur aléatoire indépendantes et  $N(0, \sigma^2)$   
 $\rho_i, \varepsilon_{ij}$  sont indépendantes

**Conséquences**

$E(Y_{ij}) = \mu_{..} + \tau_j \quad (158)$

$Var(Y_{ij}) = \sigma_\rho^2 + \sigma^2 \quad (159)$

$Cov(Y_{ij}, Y_{i'j'}) = \sigma_\rho^2 \quad j \neq j' \quad (160)$

$Cov(Y_{ij}, Y_{i'j}) = 0 \quad i \neq i' \quad (161)$

$Corr(Y_{ij}, Y_{i'j'}) = \omega = \sigma_\rho^2 / (\sigma_\rho^2 + \sigma^2) \quad (162)$

hypothèse clé : corrélation constante (symmétrie composée)  
 test de sphéricité de Mauchley

**Analyse de la variance**

totale  $SSTO = \sum \sum (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (163)$

sujet  $SSS = n \sum (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (164)$

traitement  $SSTR = s \sum (Y_{.j} - \bar{Y}_{..})^2 \quad (165)$

erreur  $SSTR.S = \sum \sum (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{..})^2 \quad (166)$

**Equation de décomposition**

$SSTO = SSS + \underbrace{SSTR + SSTR.S}_{(167)}$

totale = inter sujet + intra sujet (SSW)

**ANOVA**

Source	SS	df	MS	E(MS)
Sujets	SSS	$s - 1$	MSS	$\sigma^2 + n \sigma_\rho^2$
Traitements	SSTR	$n - 1$	MSTR	$\sigma^2 + (s/(n-1)) \sum \tau_j^2$
Erreur	SSTR.S	$(n - 1)(s - 1)$	MSTR.S	$\sigma^2$
Totale	SSTO	$sn - 1$		

Test de l'effet de traitement

$$H_0 : \tau_j = 0 \text{ pour } j = 1, 2, \dots, n$$

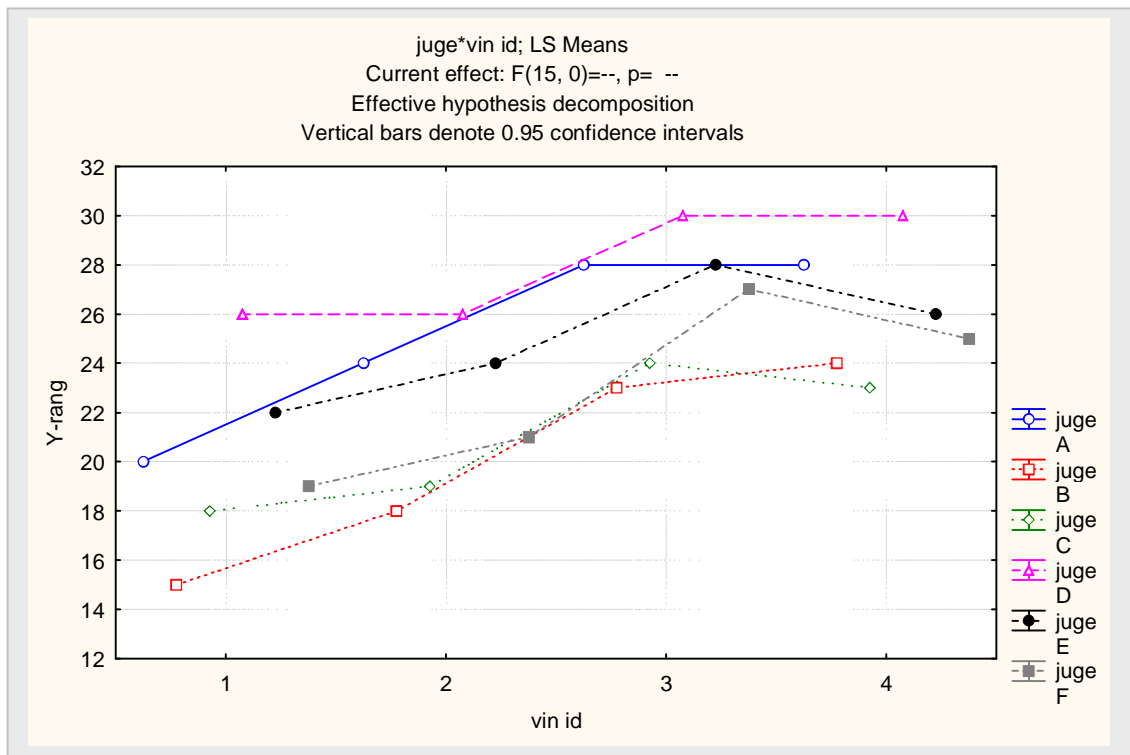
$$H_a : \text{les } \tau_j \text{ ne sont pas tous nuls}$$

On rejette  $H_0$  si  $F^* = MSTR / MSTR.S > F(1 - \alpha ; n - 1, ((n - 1)(s - 1))$  (168)  
 où  $\alpha$  est le seuil du test

remarques

- § on peut analyser les données avec une ANOVA pour 2 facteurs sans répétition ;
- § si le facteur n'est pas fixe mais aléatoire, le test (168) reste valable ;
- § le design en mesures répétées est plus efficace que le design complètement aléatoire ;
- § on peut aussi tester l'hypothèse de l'effet du facteur sujet en utilisant le ratio  $MSS / MSTR.S$

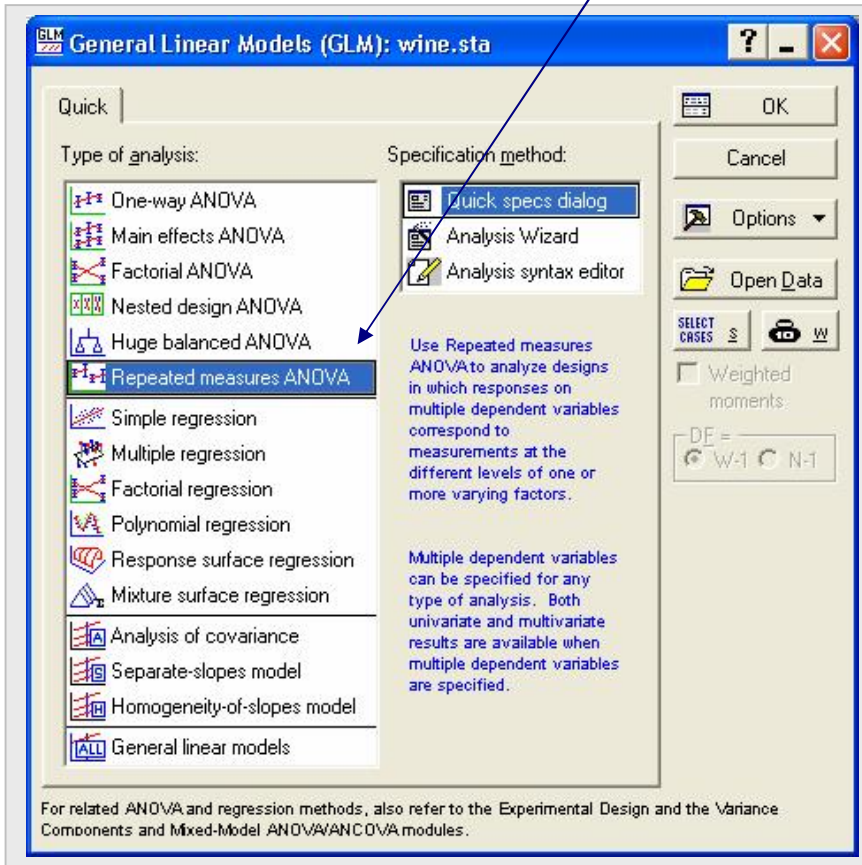
**Exemple 19 : (suite) analyse avec 2 facteurs sans répétition -procédure GLM ;  
 l'interaction sert à estimer l'erreur expérimentale  
 le facteur « juge » peut être considéré comme un facteur « bloc »**



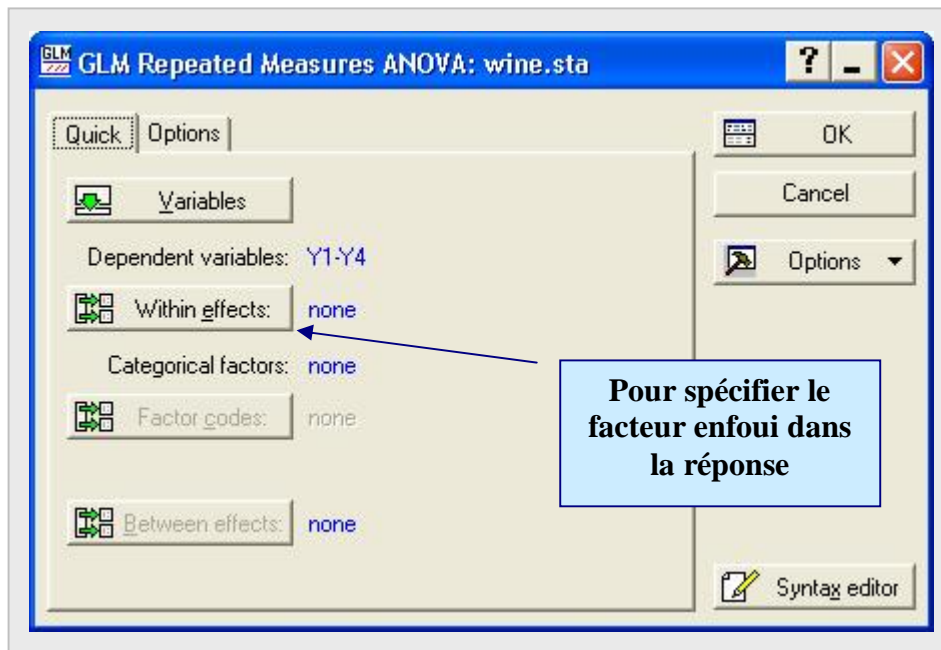
ANOVA					
	DF	SS	MS	F	p-value
Intercept	1	13442.67	13442.67	12602.50	0.000000
juge	5	173.33	34.67	32.50	0.000000
vin id	3	184.00	61.33	57.50	0.000000
Error	15	16.00	1.07		
Total	23	373.33			

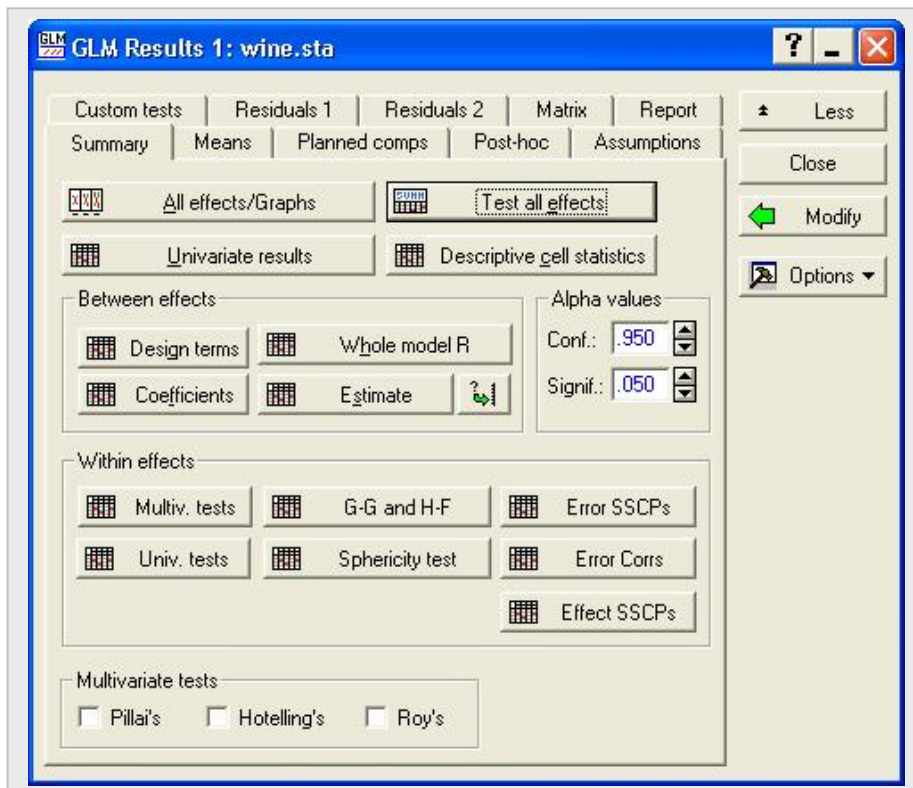
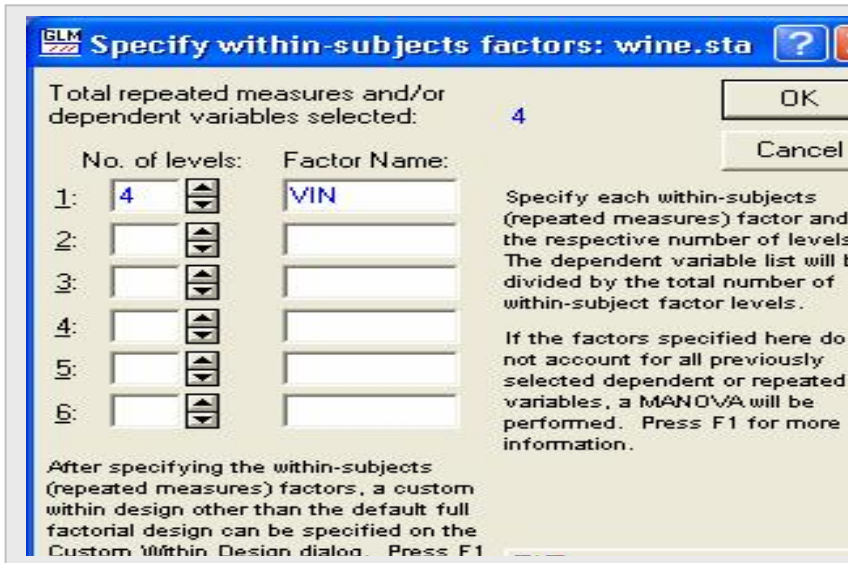


**Utilisation de Statistica pour l'analyse du design en mesures répétées avec des facteurs intra enfoui dans la réponse (« within factors ») et des facteurs inter (croisés) (« between factors »)**



**Exemple 19 (suite) évaluation de 4 bouteilles de vin par 6 juges**



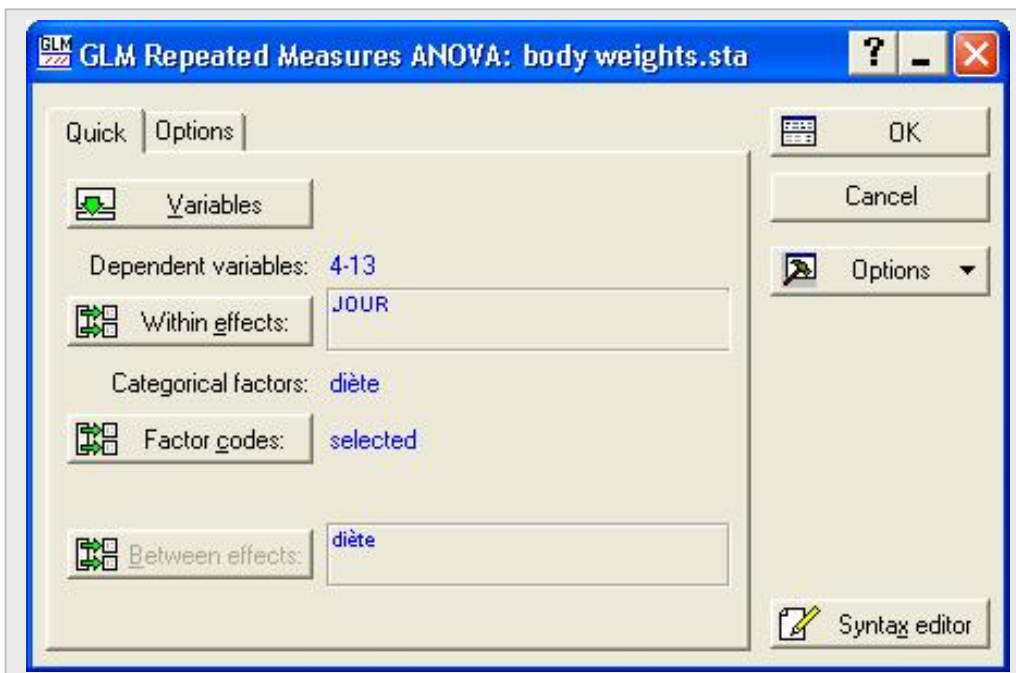
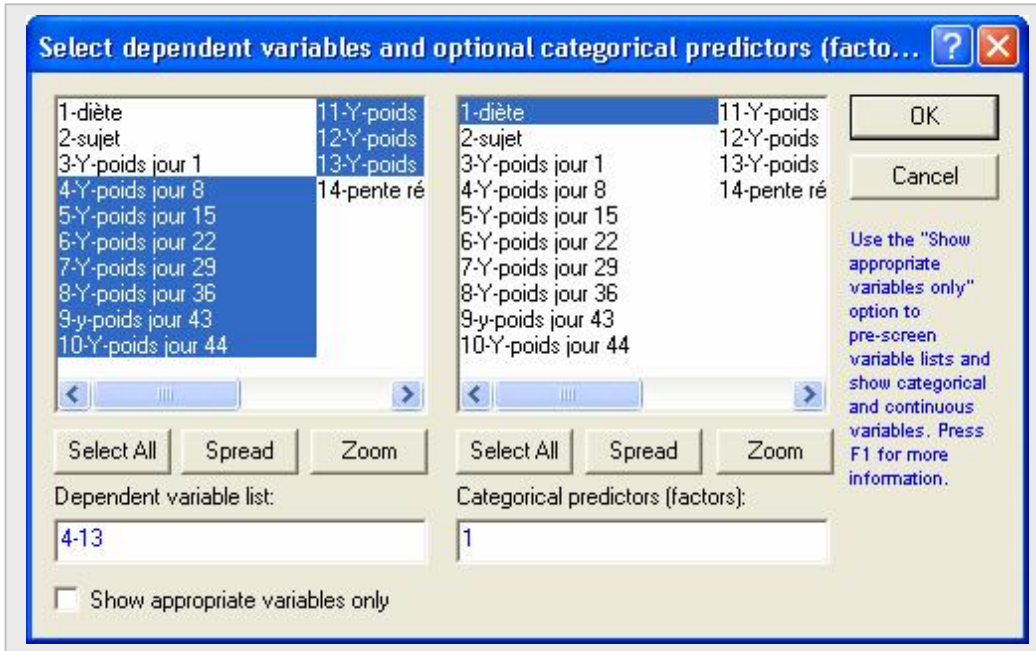


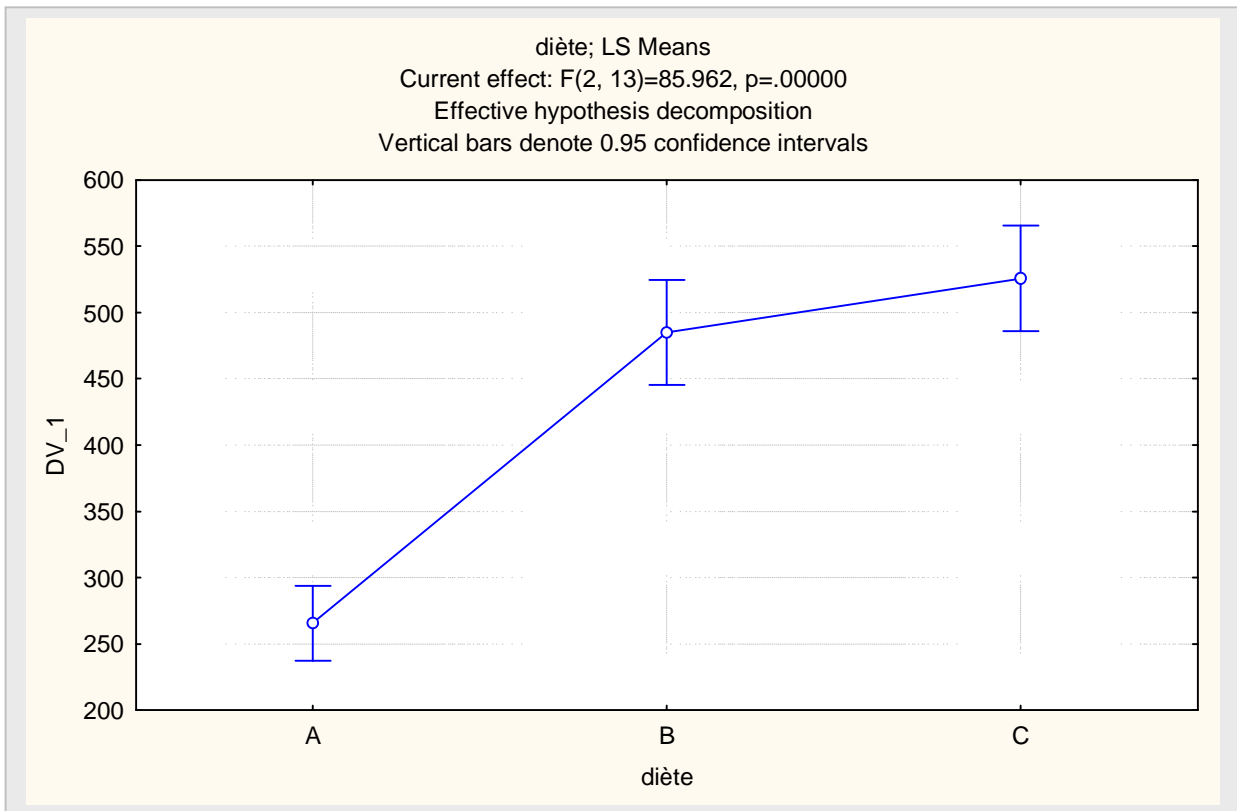
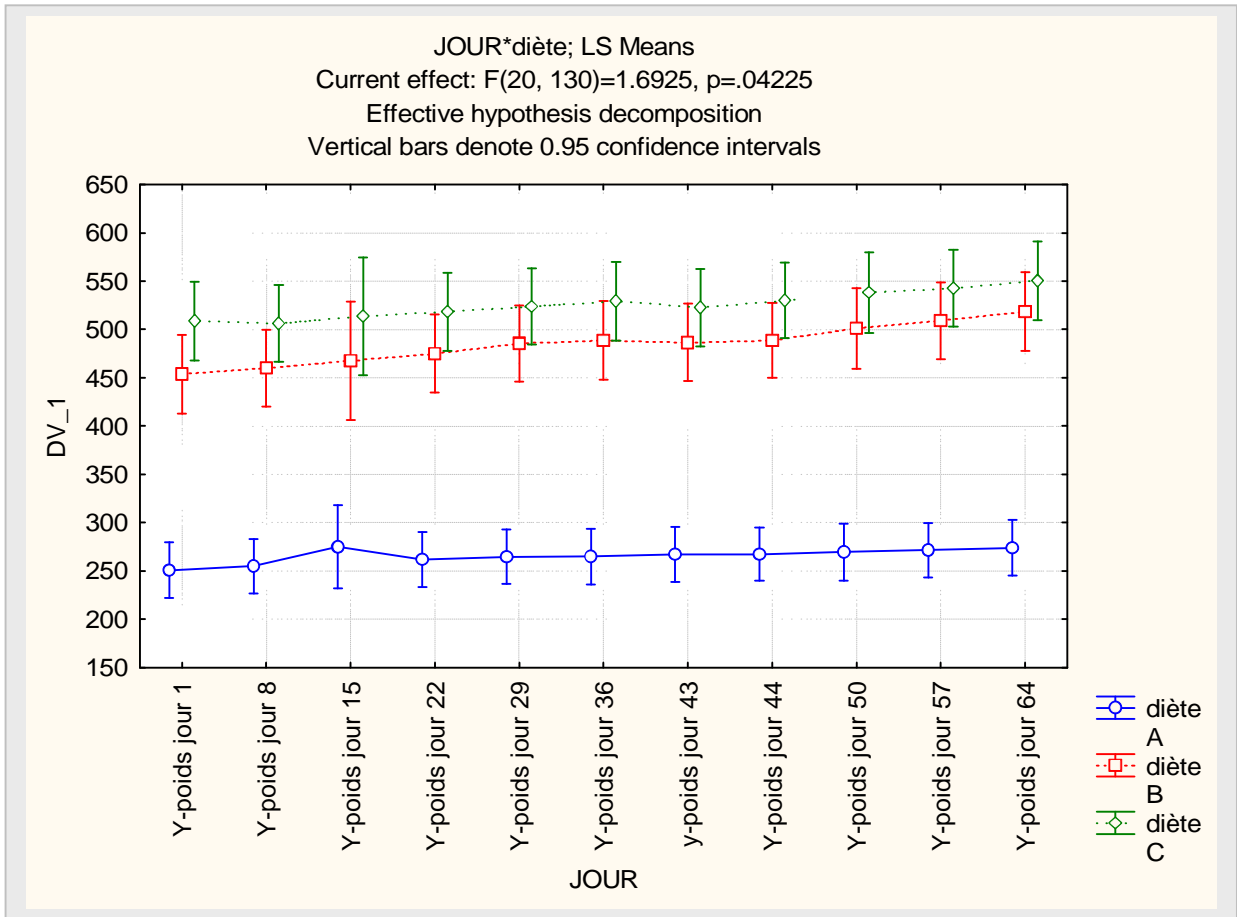
Repeated Measures Analysis of Variance					
	SS	df	MS	F	p
Intercept	13442.67	1	13442.67	387.7692	0.000006
Error	173.33	5	34.67		
VIN	184.00	3	61.33	57.5000	0.000000
Error	16.00	15	1.07		

**Test de sphéricité de Mauchley : le coefficient de corrélation entre les Y est-il constant ?**  
 réponse : oui

Mauchley Sphericity Test				
	W	Chi-Sqr.	df	p
VIN	0.351563	3.891091	5	0.5652

**Exemple 20 :** données de poids de 16 rats de laboratoire selon 3 diètes  
 poids de l'animal au jour 1, 8, 15, ..., 64

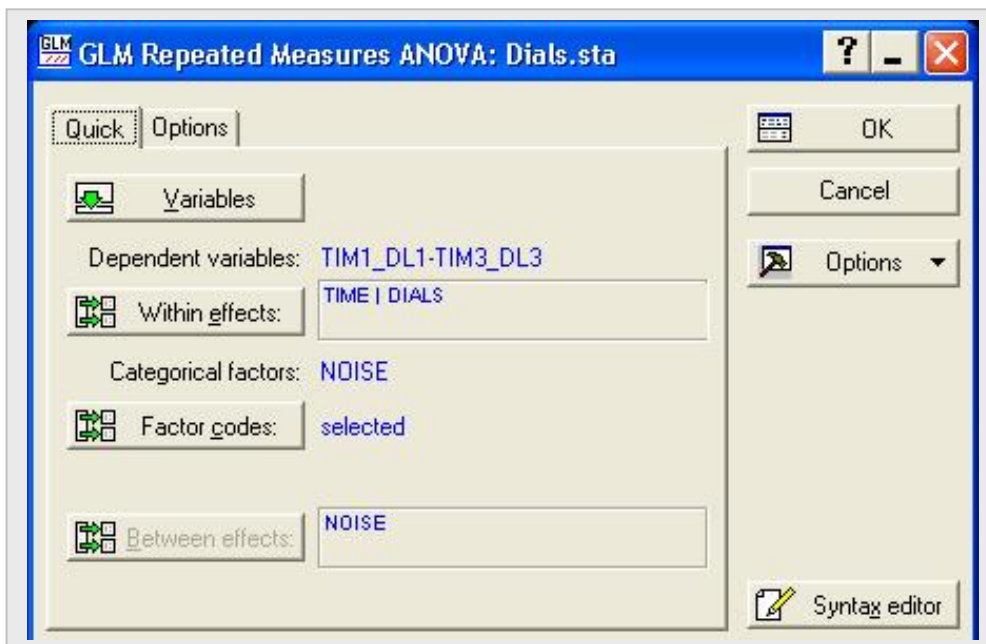




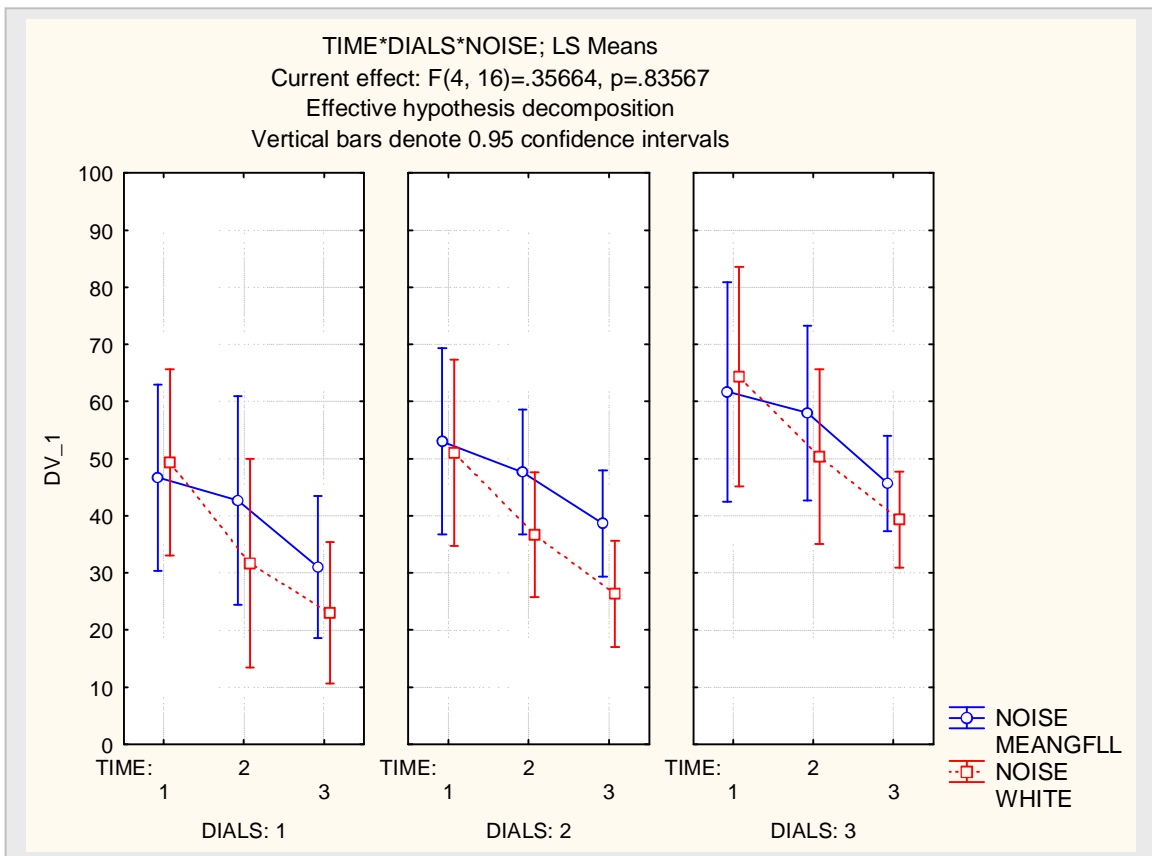
	SS	Df	MS	F	p
Intercept	28670191	1	28670191	1920.662	0.000000
diète	2566339	2	1283169	85.962	0.000000
Error	194054	13	14927		
JOUR	25041	10	2504	11.560	0.000000
JOUR*diète	7332	20	367	1.693	0.042250
Error	28160	130	217		

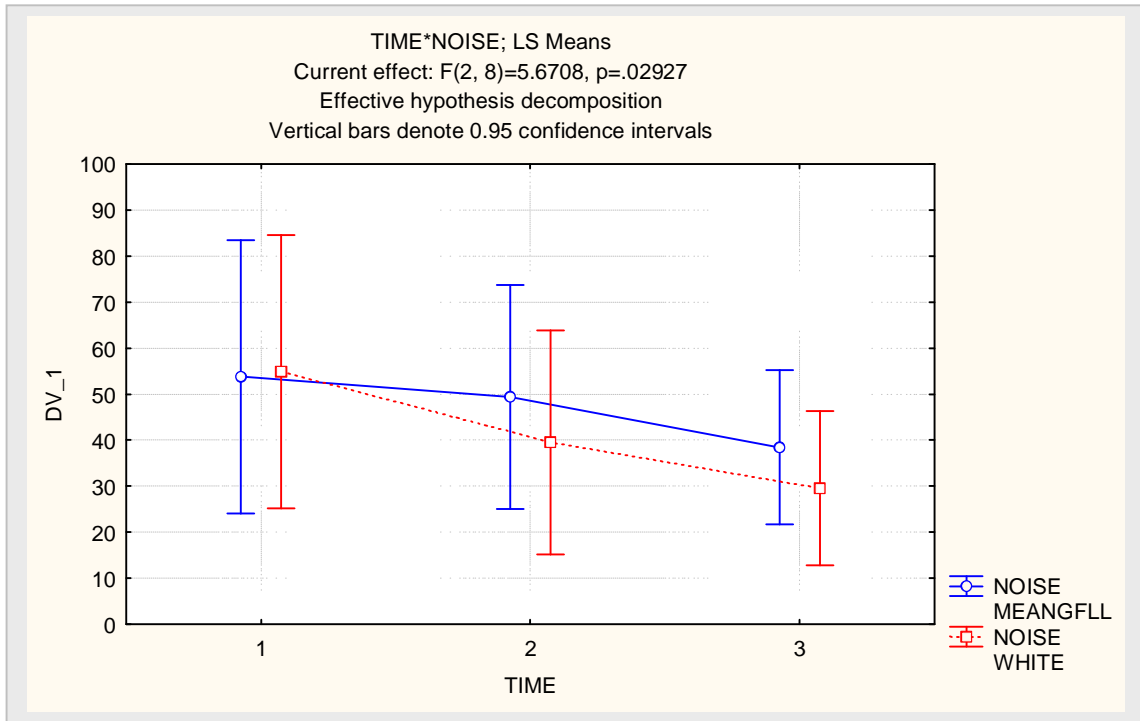
**Exemple 22 :** mesure de l'habileté d'un opérateur (sujet) de machine à ajuster 3 contrôles (« dials »).  
 Y = nombre d'erreurs durant 3 périodes consécutives de 10 minutes  
 Les ajustements de l'opérateur sont faits selon 2 conditions qui lui sont inconnues : noise = « white » et « meaningful » facteur inter  
 2 facteurs font enfuis dans la réponse : « dials » « time »

	NOISE	TIM1_DL1	TIM1_DL2	TIM1_DL3	TIM2_DL1	TIM2_DL2	TIM2_DL3	TIM3_DL1	TIM3_DL2	TIM3_DL3
1	MEANGFLL	45	53	60	40	52	57	28	37	46
2	MEANGFLL	35	41	50	30	37	47	25	32	41
3	MEANGFLL	60	65	75	58	54	70	40	47	50
4	WHITE	50	48	61	25	34	51	16	23	35
5	WHITE	42	45	55	30	37	43	22	27	37
6	WHITE	56	60	77	40	39	57	31	29	46



Repeated Measures Analysis of Variance					
	SS	df	MS	F	p
Intercept	105868.2	1	105868.2	169.9935	0.000200
NOISE	468.2	1	468.2	0.7517	0.434841
Error	2491.1	4	622.8		
TIME	3722.3	2	1861.2	63.3888	0.000012
TIME*NOISE	333.0	2	166.5	5.6708	0.029268
Error	234.9	8	29.4		
DIALS	2370.3	2	1185.2	89.8232	0.000003
DIALS*NOISE	50.3	2	25.2	1.9074	0.210215
Error	105.6	8	13.2		
TIME*DIALS	10.7	4	2.7	0.3357	0.849917
TIME*DIALS*NOISE	11.3	4	2.8	0.3566	0.835669
Error	127.1	16	7.9		

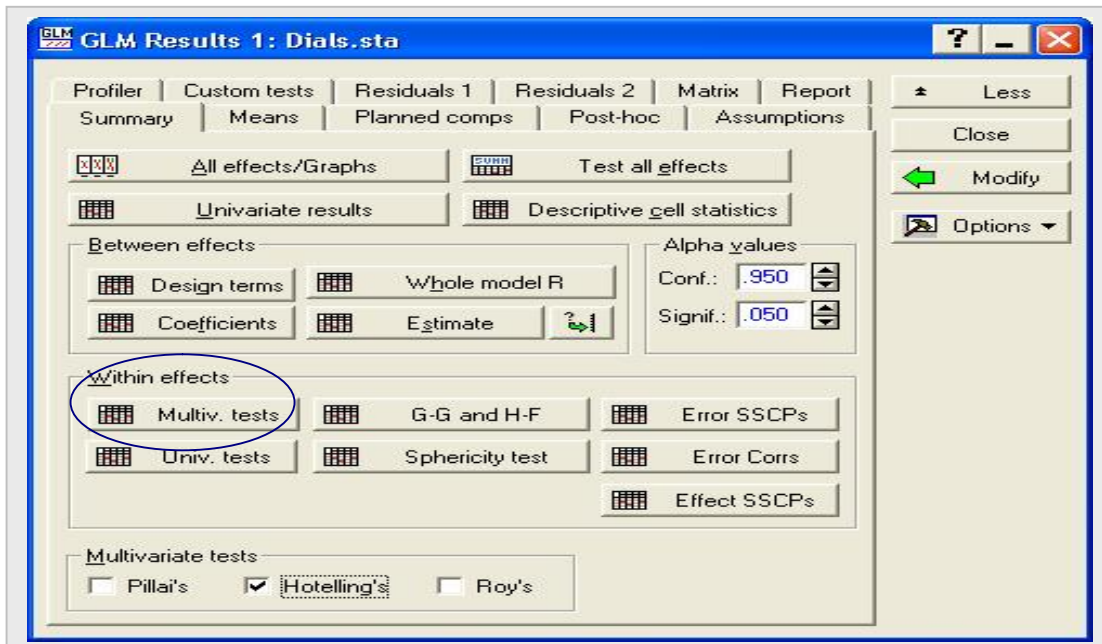




**Interprétation : effet significatif de TIME et de DIALS  
pas d'effet du facteur NOISE  
interaction significative entre NOISE et TIME mais relativement faible.**

**MANOVA : Analyse de variance multivariée      Exemple 22 : suite**

**Les 9 variables de réponse génèrent un vecteur en 9 dimensions. Les vecteurs de moyennes de ces variables diffèrent-ils selon les facteurs TIME, NOISE, et DIALS ? Il y a 4 tests multivariés (Wilk, Pillai, Hotelling, Roy) pour tester les effets principaux et d'interaction de ces facteurs.**



Multivariate tests for repeated measure						
	Test	Value	F	Effect	Error	p
<b>TIME</b>	Wilks	0.051	28.1453	2	3	<b>0.011382</b>
	Hotellng	18.764	28.1453	2	3	<b>0.011382</b>
<b>TIME*NOISE</b>	Wilks	0.156	8.1110	2	3	<b>0.061657</b>
	Hotellng	5.407	8.1110	2	3	<b>0.061657</b>
<b>DIALS</b>	Wilks	0.016	91.4562	2	3	<b>0.002050</b>
	Hotellng	60.971	91.4562	2	3	<b>0.002050</b>
<b>DIALS*NOISE</b>	Wilks	0.565	1.1549	2	3	<b>0.424671</b>
	Hotellng	0.770	1.1549	2	3	<b>0.424671</b>
<b>TIME*DIALS</b>	Wilks	0.001	331.4450	4	1	<b>0.041170</b>
	Hotellng	1325.780	331.4450	4	1	<b>0.041170</b>
<b>TIME*DIALS*NOISE</b>	Wilks	0.000	581.8750	4	1	<b>0.031081</b>
	Hotellng	2327.500	581.8750	4	1	<b>0.031081</b>

### Expérience à 2 facteurs avec mesures répétées sur un facteur

Dans plusieurs situations expérimentales faisant intervenir 2 facteurs, des mesures répétées peuvent être faites seulement sur un des deux facteurs. Par exemple, supposons que l'on veuille étudier l'effet de deux types de stimuli (facteur A) sur l'habileté d'un individu à résoudre deux types de problèmes (facteur B). Les modalités du facteur B sont : problème concret, problème abstrait.

Chaque sujet devra résoudre chaque type de problème mais il ne pourra être exposé aux 2 conditions de motivation (facteur A) à cause de l'effet d'interférence causée par l'apprentissage. L'organisation des données est présentée par le schéma suivant. Le facteur B est répété et chaque sujet constitue un bloc. Certains sujets reçoivent B1 pour commencer et B2 ensuite tandis que les autres reçoivent la séquence B2 au début et B1 ensuite.

stimulus	sujet	traitement A	ordre 1 traitement B	ordre 2 traitement B
A1	1	A1	B1	B2
	.	.	.	.
	s	A1	B2	B1
.....	.....	.....	.....	.....
A2	s + 1	A2	B2	B1
	.	.	.	.
	2s	.A2	B1	B2



**Modèle :** S : facteur aléatoire sujet  $i = 1, 2, \dots, s$   
 A : facteur fixe  $j = 1, 2, \dots, a$   
 B : facteur fixe  $k = 1, 2, \dots, b$   
 le facteur S est emboité dans le facteur A

$Y_{ijk}$  : réponse

$$Y_{ijk} = \mu \dots + \rho_{i(j)} + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \varepsilon_{ijk} \tag{169}$$

où  $\mu \dots$  : effet général

$\rho_{i(j)}$  : effet aléatoire du sujet  $i$  emboité dans la modalité  $j$  du facteur A  
 distribution  $N(0, \sigma_p^2)$

$\alpha_j$  : effet différentiel du facteur A  $\sum \alpha_j = 0$

$\beta_k$  : effet différentiel du facteur B  $\sum \beta_k = 0$

$(\alpha\beta)_{jk}$  : effet d'interaction AB  $\sum (\alpha\beta)_{jk} = 0 \quad \sum (\alpha\beta)_{jk} = 0$

$\varepsilon_{ijk}$  : erreur aléatoire distribuée  $N(0, \sigma^2)$

$\varepsilon_{ijk}, \rho_{i(j)}$  sont indépendantes

**Conséquences**

$$E(Y_{ijk}) = \mu \dots + \rho_{i(j)} + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} \tag{170}$$

$$\text{Var}(Y_{ijk}) = \sigma_p^2 + \sigma^2 \tag{171}$$

$$\text{Cov}(Y_{ijk}, Y_{ijk'}) = \sigma_p^2 \quad k \neq k' \tag{172}$$

$$\text{Cov}(Y_{ijk}, Y_{i'j'k'}) = 0 \quad i \neq i' \text{ ou } j \neq j' \tag{173}$$

**Analyse de la variance**

facteur A  $SSA = bs \sum (\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...})^2 \tag{174}$

facteur B  $SSB = as \sum (\bar{Y}_{.k.} - \bar{Y}_{...})^2 \tag{175}$

interaction AB  $SSAB = s \sum \sum (\bar{Y}_{.jk} - \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{.k.} + \bar{Y}_{...})^2 \tag{176}$

facteur S sujet (emboité A)  $SSS(A) = b \sum \sum (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{.j.})^2 \tag{177}$

erreur  $SSB.S(A) = \sum \sum \sum (Y_{ijk} - \bar{Y}_{.jk} - \bar{Y}_{ij.} + \bar{Y}_{.j.})^2 \tag{178}$

totale  $SSTO = \sum \sum \sum (Y_{ijk} - \bar{Y}_{...})^2 \tag{179}$

ANOVA

Source	SS	df	MS	F	test : rejet $H_0$ si
A	SSA	a - 1	MSA	MSA / MSS(A)	> F(1 - $\alpha$ ; a-1; a(s-1))
B	SSB	b - 1	MSB	MSB / MSB.S(A)	> F(1 - $\alpha$ ; a-1; a(s-1)(b-1))
AB	SSAB	(a-1)(b-1)	MSAB	MSAB / MSB.S(A)	> F(1 - $\alpha$ ; a-1; a(s-1)(b-1))
S(A)	SSS(A)	a(s - 1)	MSS(A)	-----	-----
Erreur	SSB.S(A)	a(s-1)(b-1)	MSB.S(A)	-----	-----
Totale	SSTO	abs - 1	-----	-----	-----

**Espérance des carrés moyens MS : constitue la base des tests sur les coefficients du modèle**

$$E (MSA) = \sigma^2 + b \sigma_p^2 + (bs/(a-1)) \sum \alpha_j^2 \tag{180}$$

$$E (MSB) = \sigma^2 + (as/(b-1)) \sum \beta_k^2 \tag{181}$$

$$E (MSAB) = \sigma^2 + (s/(a-1)(b-1)) \sum \sum (\alpha\beta)_{jk}^2 \tag{182}$$

$$E (MSS(A) = \sigma^2 + b \sigma_p^2 \tag{183}$$

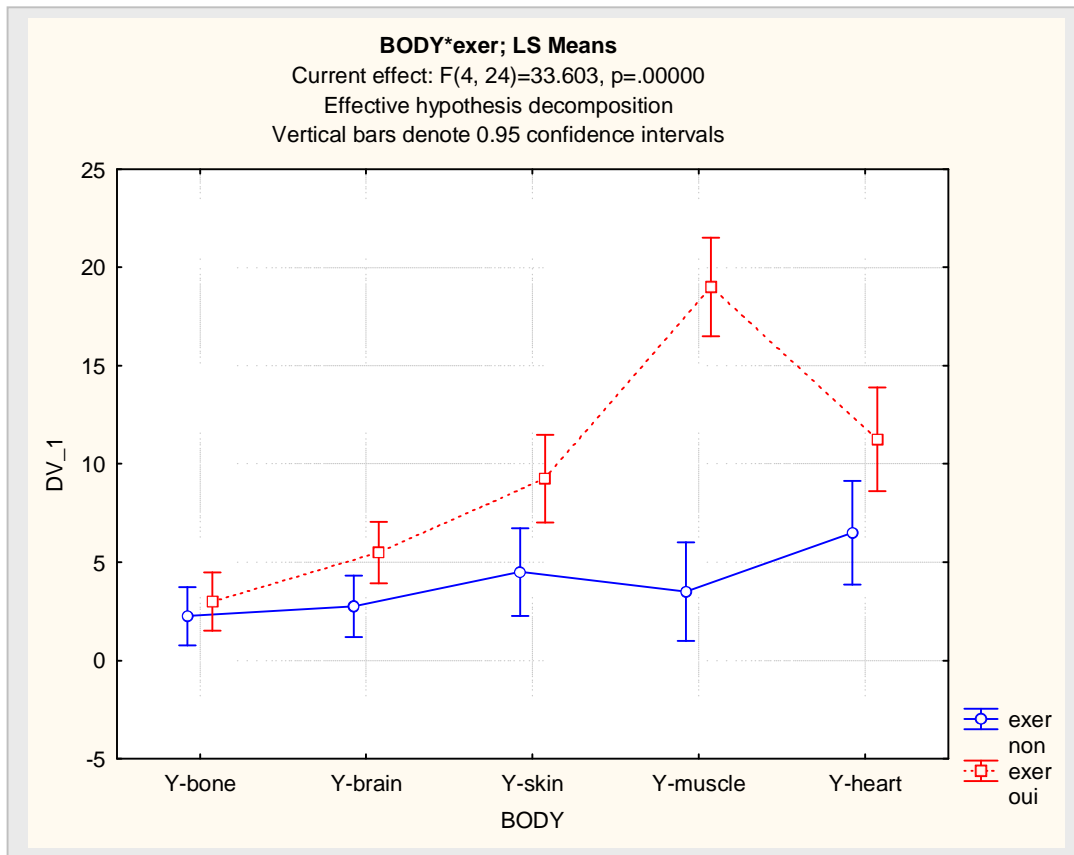
$$E (MSB.S(A) ) = \sigma^2 \tag{184}$$

**Exemple 21 : afflux de sang** données page 92  
il y a 2 termes d'erreur

Repeated Measures Analysis of Variance					
	SS	DF	MS	F	p
Intercept	1822.5	1	1822.5	247.40	0.0000
exer	324.9	1	324.9	44.10 = 324.9 / 7.4	0.0006
erreur	44.2	6	7.4		
BODY	389.5	4	97.4	49.94 = 97.4 / 1.9	0.0000
BODY*exer	262.1	4	65.5	33.60 = 65.5 / 1.9	0.0000
erreur	46.8	24	1.9		

S(A) = erreur = 7.4

B.S(A) = erreur = 1.9



## Expérience à 2 facteurs avec mesures répétées sur les deux facteurs

**Exemple 23** : mesure de afflux de sang suite à la prise de 2 médicaments A et B

A1B1 : placebo

A1B2 : médicament A seulement

A2B1 : médicament B seulement

A2B2 : usage des deux médicaments A et B

Kutner et al 5 ed. p. 1158					
	sujet	Y-A1B1	Y-A1B2	Y-A2B1	Y-A2B2
1	s1	2	20	9	25
2	s2	-1	8	6	21
3	s3	0	11	8	24
4	s4	3	15	11	31
5	s5	1	5	6	20
6	s6	2	12	9	27
7	s7	-2	10	8	22
8	s8	4	16	12	30
9	s9	-2	7	7	24
10	s10	-2	10	10	28
11	s11	2	8	10	25
12	s12	-1	8	6	23

### Modèle

S : facteur sujet (aléatoire)  $i = 1, 2, \dots, s$

A : facteur fixe  $j = 1, 2, \dots, a$

B : facteur fixe  $k = 1, 2, \dots, b$

chaque sujet S reçoit toutes les combinaisons (j, k) des facteurs A et B

$Y_{ijk}$  : réponse du sujet i recevant modalité j de A et la modalité k de B

$$Y_{ijk} = \mu \dots + \rho_i + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + (\rho\alpha)_{ij} + (\rho\beta)_{ik} + \varepsilon_{ijk} \quad (185)$$

où

$\mu \dots$  : effet général

$\rho_i$  : effet aléatoire du facteur sujet  $\sim N(0, \sigma_\rho^2)$

$\alpha_j$  : effet différentiel du facteur fixe A  $\sum \alpha_j = 0$

$\beta_k$  : effet différentiel du facteur fixe B  $\sum \beta_k = 0$

$(\alpha\beta)_{jk}$  : effet d'interaction AB et  $\sum_i (\alpha\beta)_{jk} = 0$   $\sum_k (\alpha\beta)_{jk} = 0$

$(\rho\alpha)_{ij}$  : effet aléatoire d'interaction SA  $\sim N(0, ((a-1)/a) \sigma_{\rho\alpha}^2)$   $\sum_i (\rho\alpha)_{ij} = 0$

$$\text{cov}((\rho\alpha)_{ij}, (\rho\alpha)_{ij'}) = (-1/a) \sigma_{\rho\alpha}^2 \quad j \neq j'$$

$(\rho\beta)_{ik}$  : effet aléatoire d'intraction SB  $\sim N(0, ((b-1)/b) \sigma_{\rho\beta}^2)$   $\sum_i (\rho\beta)_{ik} = 0$

$$\text{cov}((\rho\beta)_{ik}, (\rho\beta)_{ik'}) = (-1/b) \sigma_{\rho\beta}^2 \quad k \neq k'$$

$\rho_i, (\rho\alpha)_{ij}, (\rho\beta)_{ik}$  sont indépendantes 2 à 2

$\varepsilon_{ijk}, \rho_i, (\rho\alpha)_{ij}, (\rho\beta)_{ik}$  sont indépendantes

$$\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$$

**Conséquences**

$$E(Y_{ijk}) = \mu_{...} + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} \tag{186}$$

$$\text{Var}(Y_{ijk}) = \sigma^2_{\rho} + ((a-1)/a) \sigma^2_{\rho\alpha} + ((b-1)/b) \sigma^2_{\rho\beta} + \sigma^2 \tag{187}$$

**Analyse de la variance**

facteur sujet S  $SSS = ab \sum (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2$  (188)

facteur A  $SSA = sb \sum (\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...})^2$  (190)

facteur B  $SSB = sa \sum (\bar{Y}_{..k} - \bar{Y}_{...})^2$  (191)

interaction AB  $SSAB = s \sum \sum (\bar{Y}_{.jk} - \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{..k} + \bar{Y}_{...})^2$  (192)

interaction AS  $SSAS = b \sum \sum (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...})^2$  (193)

interaction BS  $SSBS = a \sum \sum (Y_{i.k} - Y_{i.} - Y_{..k} + Y_{...})^2$  (194)

interaction ABS  $SSABS = \sum \sum \sum (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i.k} - \bar{Y}_{.jk} + \bar{Y}_{i.} + \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{..k} - \bar{Y}_{...})^2$  (195)

totale  $SSTO = \sum \sum \sum (Y_{ijk} - \bar{Y}_{...})^2$  (196)

**ANOVA**

Source	SS	df	MS	F	test: rejet H <sub>0</sub> si
Sujets S	SSS	s - 1	MSS	-----	-----
Facteur A	SSA	a - 1	MSA	F3=MSA / MSAS	> F(1- $\alpha$ ; a-1;(a-1)(s-1))
Facteur B	SSB	b - 1	MSB	F2=MSB / MSBS	> F(1- $\alpha$ ; b-1;(b-1)(s-1))
Inter AB	SSAB	(a-1)(b-1)	MSAB	F1=MSAB / MSABS	> F(1- $\alpha$ ; (a-1)(b-1); (a-1)(b-1)(s-1))
Inter AS	SSAS	(a-1)(s-1)	MSAS	-----	-----
Inter BS	SSBS	(b-1)(s-1)	MSBS	-----	-----
Erreur	SSABS	(a-1)(b-1)(s-1)	MSABS	-----	-----
Totale	SSTO	abs -1	-----		

**Espérance des carrés moyens MS : constitue la base des tests sur les coefficients du modèle**

$$E(MSS) = \sigma^2 + ab \sigma_{\rho}^2 \tag{198}$$

$$E(MSA) = \sigma^2 + b \sigma_{\rho\alpha}^2 + ((bs/(a-1)) \sum \alpha_j^2) \tag{199}$$

$$E(MSB) = \sigma^2 + a \sigma_{\rho\beta}^2 + ((as/(b-1)) \sum \beta_k^2) \tag{199}$$

$$E(MSAB) = \sigma^2 + ((s/(a-1)(b-1)) \sum \sum (\alpha\beta)_{jk}^2) \tag{200}$$

$$E(MSAS) = \sigma^2 + b \sigma_{\rho\alpha}^2 \tag{201}$$

$$E(MSBS) = \sigma^2 + b \sigma_{\rho\beta}^2 \tag{201}$$

$$E(MSABS) = \sigma^2 \tag{202}$$

**Hypothèses**

H<sub>0</sub> : (αβ)<sub>jk</sub> = 0 pour tout (j, k)      ratio F1 plus haut  
 H<sub>0</sub> : α<sub>j</sub> = 0 pour tout j              ratio F3 plus haut  
 H<sub>0</sub> : β<sub>k</sub> = 0 pour tout k              ratio F2 plus haut

**Exemple 23 : données de « blood flow » : deux méthodes pour l'analyse**

**méthode 1 :** considérer que les 3 facteurs A, B, S interviennent dans une expérience factorielle complète sans répétition ; on emploie « Factorial ANOVA »  
 remarque : il est important de définir correctement les ratios pour les tests

**méthode 2 :** approche à mesures répétées avec 4 variables de réponse

**Méthode 1** procédure Factorial ANOVA



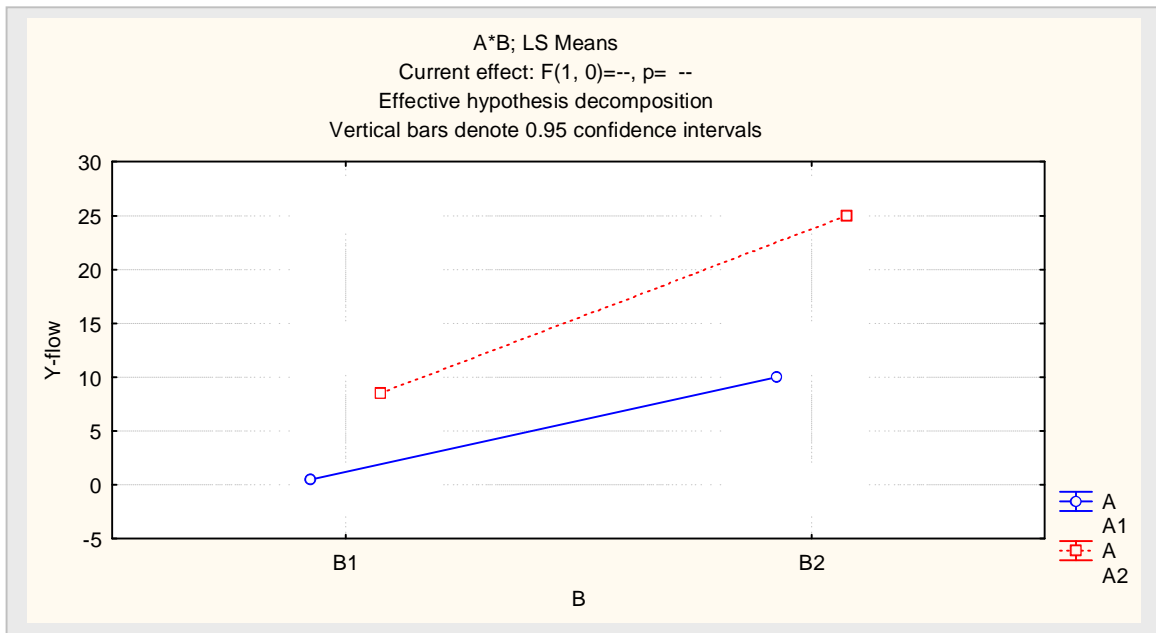
données : format classique

Kutner et all 5 ed. p. 1158

	sujet	A	B	Y-flow
1	s1	A1	B1	2
2	s1	A1	B2	10
3	s1	A2	B1	9
4	s1	A2	B2	25
5	s2	A1	B1	-1
6	s2	A1	B2	8
	.	.	.	.
43	s11	A2	B1	10
44	s11	A2	B2	25
45	s12	A1	B1	-1
46	s12	A1	B2	8
47	s12	A2	B1	6
48	s12	A2	B2	23

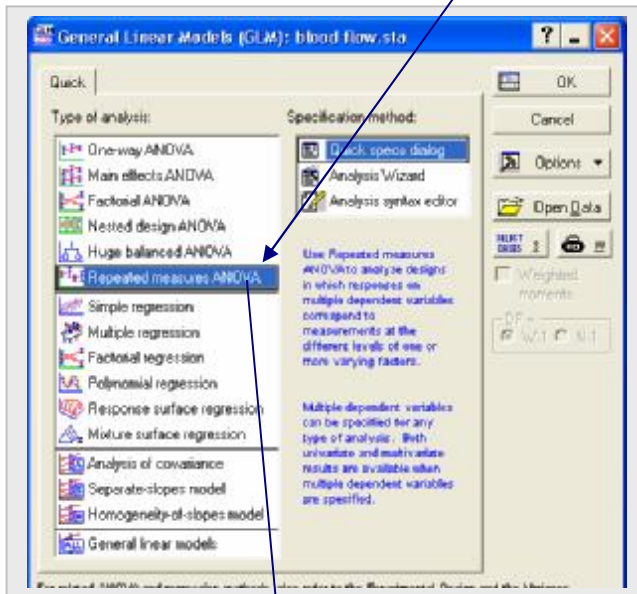
Univariate Tests of Significance for Y Effective hypothesis decomposition					
	SS	DF	MS	F	p
Intercept	5808.000	1	5808.000		
sujet	258.500	11	23.500		
A	1587.000	1	1587.000		
B	2028.000	1	2028.000		
sujet*A	22.500	11	2.045		
sujet*B	42.500	11	3.864		
A*B	147.000	1	147.000		
sujet*A*B	12.500	11	1.136		
Error		0			

**Test de l'interaction AB :**  $F_3 = 147.000 / 1.136 = 129.4$  **significatif !**  
**Test de l'effet de A :**  $F_1 = 1587.00 / 2.045 = 776.04$  **significatif !**  
**Test de l'effet de B :**  $F_2 = 2028.00 / 3.864 = 524.85$  **significatif !**



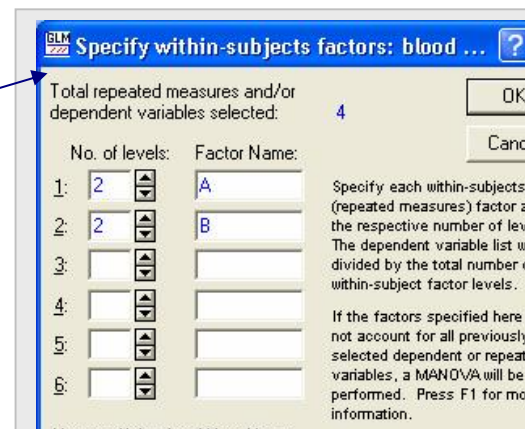
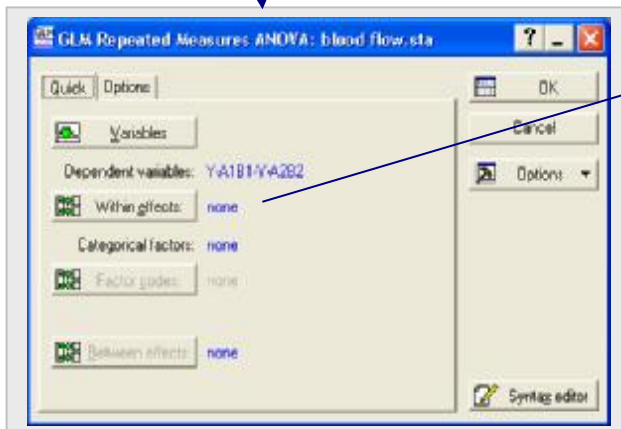
**Méthode 2 : approche à mesures répétées avec 4 variables de réponse**

données : facteurs enflous dans la réponse

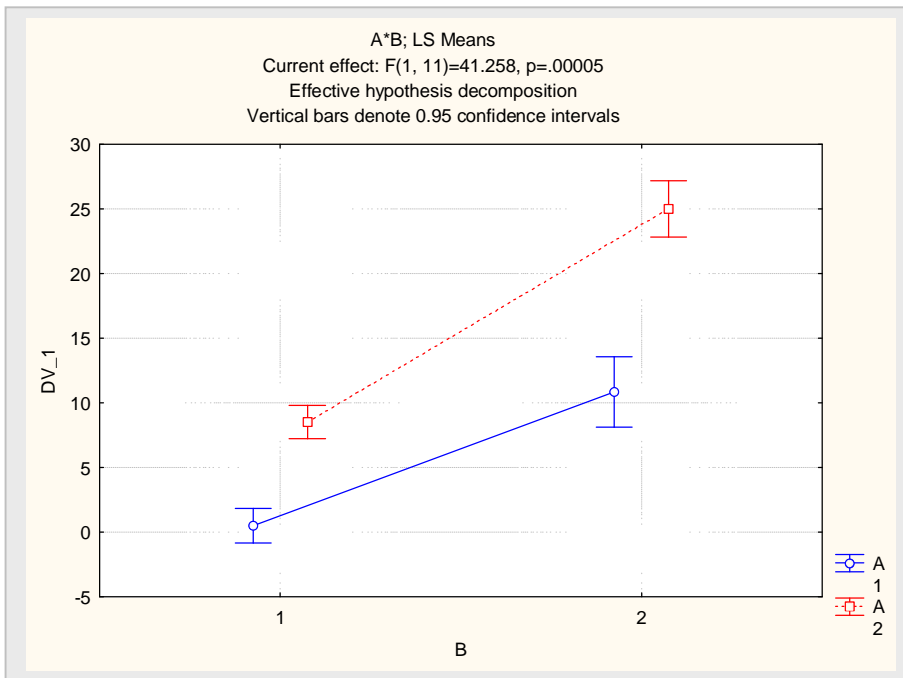


Kutner et all 5 ed. p. 1158

	sujet	Y-A1B1	Y-A1B2	Y-A2B1	Y-A2B2
1	s1	2	20	9	25
2	s2	-1	8	6	21
3	s3	0	11	8	24
4	s4	3	15	11	31
5	s5	1	5	6	20
6	s6	2	12	9	27
7	s7	-2	10	8	22
8	s8	4	16	12	30
9	s9	-2	7	7	24
10	s10	-2	10	10	28
11	s11	2	8	10	25
12	s12	-1	8	6	23



Repeated Measures Analysis of Variance					
	SS	DF	MS	F	p
Intercept	6030.083	1	6030.083	227.6154	0.000000
Error	291.417	11	26.492		
A	1474.083	1	1474.083	321.6182	0.000000
Error	50.417	11	4.583		
B	2160.083	1	2160.083	428.7684	0.000000
Error	55.417	11	5.038		
A*B	114.083	1	114.083	41.2575	0.000049
Error	30.417	11	2.765		



**Remarque**

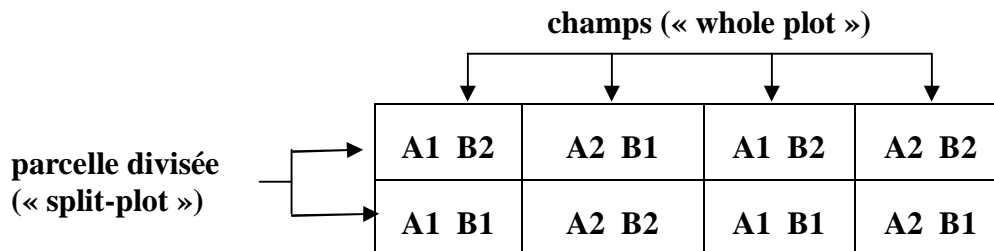
**Si le design n'est pas équilibré (nombre inégal dans chaque cellule) ou s'il y a des données absentes dans certaines cellules, il faut employer une approche par régression avec des variables indicatrices pour faire l'analyse.**

## Le plan à parcelles divisées (« Split-Plot design »)

Le plan à parcelles divisées est fréquemment employé dans les expériences en sciences agronomiques, en laboratoire, dans les expériences industrielles en sciences de la vie et en sciences sociales. Nous présentons le cas d'expériences avec deux facteurs mais on peut appliquer les plans à parcelles divisées avec plus de deux facteurs.

Le plan a été originalement développé pour les expériences agronomiques. On considère une étude pour évaluer l'effet de deux facteurs sur le rendement  $Y$  d'une production d'une variété de blé. Les deux facteurs sont : la méthode d'irrigation (facteur A) et le fertilisant (facteur B). On suppose que chaque facteur prend deux modalités ou plus. Si chaque facteur varie avec deux modalités, on a donc un plan factoriel complet avec quatre traitements :  $(A, B) = (A1, B1), (A1, B2), (A2, B1), (A2, B2)$ .

La caractéristique fondamentale du plan à parcelles divisées est la méthode d'attribution des traitements aux unités expérimentales. Il y a un premier niveau d'attribution à des unités expérimentales qui sont appelées les parcelles (« whole plot »). Celles-ci reçoivent, au hasard, l'une des deux modalités du facteur A. Les parcelles sont ensuite subdivisées en de plus petites unités appelées parcelles divisées (« split-plot »). Ces dernières reçoivent, au hasard, l'une des deux modalités du facteur B. Dans notre exemple, des champs reçoivent une méthode d'irrigation et, après subdivision des champs en plus petite unité, on attribue un fertilisant. On peut représenter l'expérience avec la figure suivante.



### Exemple 24 : rendement d'une variété de blé

Kutner et al 5 ed. p. 1170 - données design split-plot / parcelles divisées								
	field	irrig	fertilisant	Y-yield	field2	irrig2	Y-fert1	Y-fert2
1	f1	irrig1	fert1	43	f1	irrig1	43	48
2	f1	irrig1	fert2	48	f2	irrig1	40	43
3	f2	irrig1	fert1	40	f3	irrig1	31	36
4	f2	irrig1	fert2	43	f4	irrig1	27	30
5	f3	irrig1	fert1	31	f5	irrig1	36	39
6	f3	irrig1	fert2	36	f6	irrig2	63	70
7	f4	irrig1	fert1	27	f7	irrig2	52	53
8	f4	irrig1	fert2	30	f8	irrig2	45	48
9	f5	irrig1	fert1	36	f9	irrig2	47	51
10	f5	irrig1	fert2	39	f10	irrig2	54	57



**Exemple 24 : données (suite)**

Kutner et all 5 ed. p. 1170 - données design split-plot / parcelles divisées								
	field	irrig	fertilisant	Y-yield	field2	irrig2	Y-fert1	Y-fert2
11	f6	irig2	fert1	63				
12	f6	irig2	fert2	70				
13	f7	irig2	fert1	52				
14	f7	irig2	fert2	53				
15	f8	irig2	fert1	45				
16	f8	irig2	fert2	48				
17	f9	irig2	fert1	47				
18	f9	irig2	fert2	51				
19	f10	irig2	fert1	54				
20	f10	irig2	fert2	57				

**Structure**

Dans cet exemple, la structure du plan est formé par un facteur externe (ou facteur inter unité) (« between factor ») constitué par irrigation et d'un facteur enfoui dans la réponse (ou facteur intra unité) (« within factor ») constitué par le facteur fertilisant. Il ya deux types d'unité : les champs constituant les grandes unités et, les parcelles, qui forment les unités plus petites.

**Modèle**

Nous avons déjà vu cette structure à la page 103 :

deux facteurs avec mesure répétées sur un facteur

$$Y_{ijk} = \mu \dots + \rho_{i(j)} + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \varepsilon_{ijk} \tag{203}$$

$\alpha_j$  : effet de la méthode d'irrigation (facteur A)– traitement parcelle

$\beta_k$  : effet du fertilisant (facteur B) – traitement parcelle divisée

$\rho_{i(j)}$  : effet de la modalité i du facteur parcelle (=sujet) emboîté dans dans la modalité j du facteur A (méthode d'irrigation)

Le tableau d'ANOVA est identique à celui présenté à la page 103. Nous le reproduisons ici en changeant l'ordre des lignes et en renommant SSS(A) par SSW(A) et SSB.S(A) par SSB.W(A). Les tests d'hypothèses concernent les l'effet principal du facteur A et celui de facteur A ainsi que l'effet d'interaction AB.

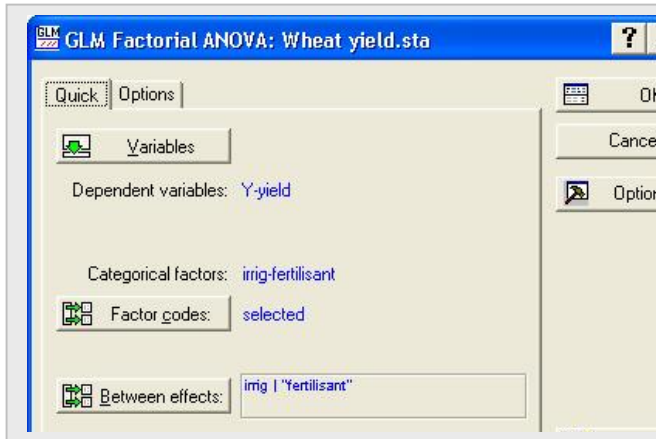
ANOVA					
Source	SS	df	MS	F	test : rejet $H_0$ si
grande parcelle (whole plot)					
A	SSA	a – 1	MSA	MSA / MSW(A)	> F(1 - $\alpha$ ; a-1; a(s-1))
S(A)(erreur)	SSW(A)	a(s – 1)	MSW(A)	-----	-----
petite parcelle (split plot)					
B	SSB	b – 1	MSB	MSB / MSB.W(A)	> F(1 - $\alpha$ ; a-1; a(s-1)(b-1))
AB	SSAB	(a-1)(b-1)	MSAB	MSAB / MSB.W(A)	> F(1 - $\alpha$ ; a-1; a(s-1)(b-1))
Erreur	SSB.W(A)	a(s-1)(b-1)	MSB.W(A)	-----	
Totale	SSTO	abs – 1	-----	-----	-----

## Analyse avec Statistica

**Une analyse erronée** : basée sur l'interprétation erronée du plan expérimental :  
**plan factoriel de 2 facteurs et assignation des traitements aléatoirement  
 aux unités expérimentales. Il y a 2 erreurs dans cette interprétation :**

- l'assignation est en mode parcelles divisées.
- il y a deux tailles d'unités expérimentales

**Voyons le résultat de la mise en œuvre GLM factorial ANOVA.**



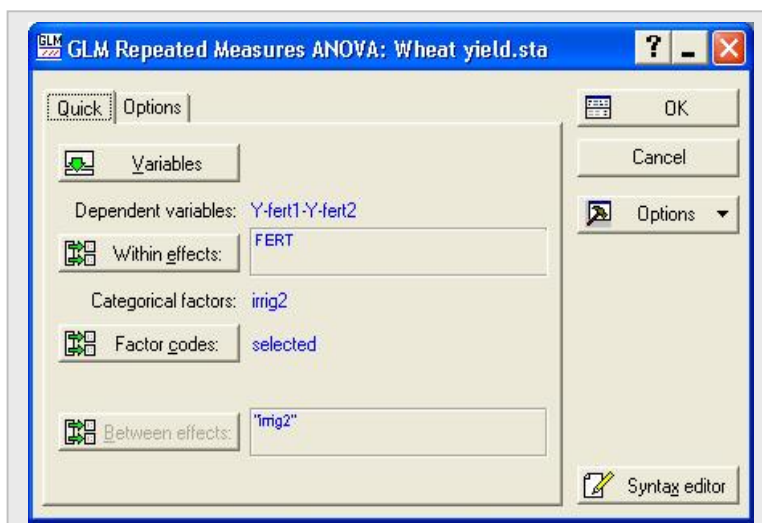
ANOVA					
	DF	SS	MS	F	p-value
Intercept	1	41678.45	41678.45	784.9049	0.000000
irrig	1	1394.45	1394.45	26.2608	0.000102
fertilisant	1	68.45	68.45	1.2891	0.272940
irrig*fertilisant	1	0.05	0.05	0.0009	0.975900
Error	16	849.60	53.10		
Total	19	2312.55			

**conclusion** : facteur irrigation est significatif

facteur fertilisant et l'interaction irrig\*fertilisant non significatifs

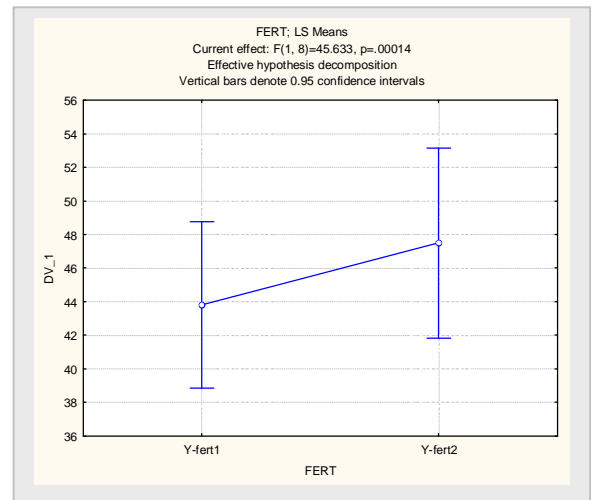
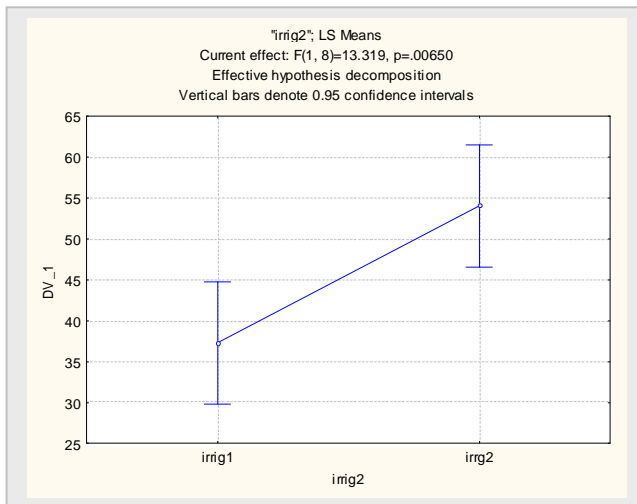
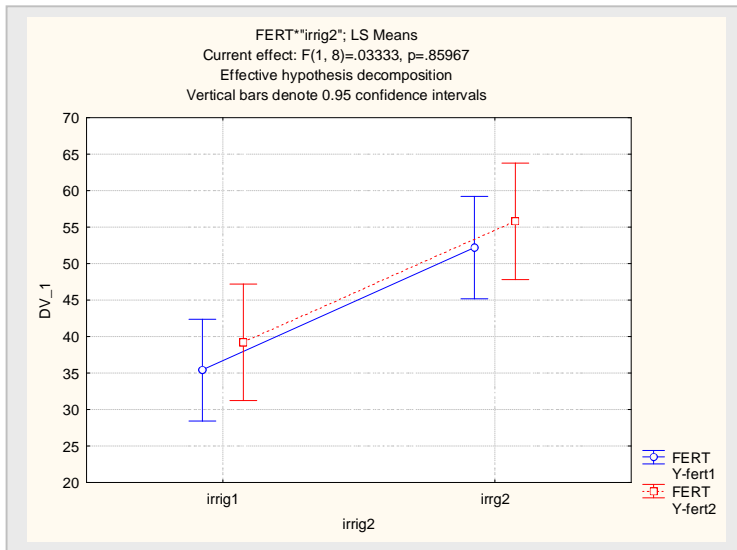
**Cette analyse est erronée pour les raisons mentionnées plus haut.**

**Une analyse correcte** : basée sur le design « Split Plot » - mesures répétées



ANOVA : Repeated Measures Analysis of Variance					
	SS	DF	MS	F	p
Intercept	41678.45	1	41678.45	398.0750	0.000000
"irrig2"	1394.45	1	1394.45	13.3185	0.006499
Error	837.60	8	104.70		
FERT	68.45	1	68.45	45.6333	0.000144
FERT**"irrig2"	0.05	1	0.05	0.0333	0.859674
Error	12.00	8	1.50		

conclusion : irrigation et fertilisant sont significatifs.

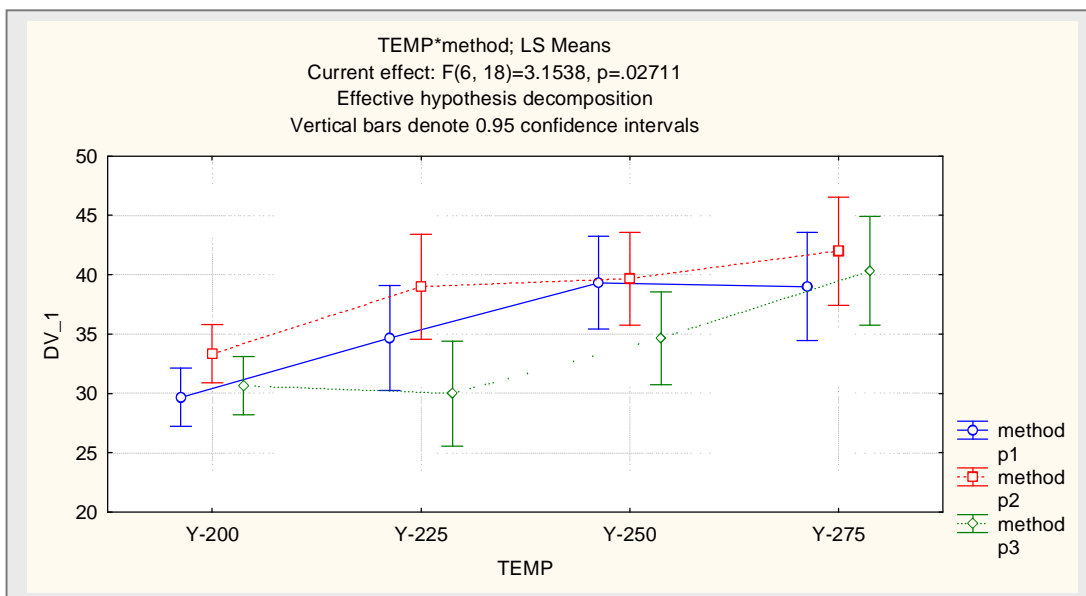


**Exemple 25 : fabrication papier**

- 3 méthodes préparation pulpe : P1 – P2 -P3
- 4 niveaux de température : 200 - 225 - 250 - 275 (deg. F)
- 3 x 4 = 12 traitements
- réponse Y : force tension papier
- 2 répétitions : n = 3
- contrainte ressources : 12 essais par jour
- exécution des 12 traitements par jour : répétition ou bloc
- lot («plot») pulpe préparé selon une méthode
- lot divisé en 4 échantillons («subplot» / «split-plot» /split unit)

<u>données</u>	<u>répétition (bloc) 1</u>			<u>répétition 2</u>			<u>répétition 3</u>		
<u>méthode prép. pulpe</u>	<u>P1</u>	<u>P2</u>	<u>P3</u>	<u>P1</u>	<u>P2</u>	<u>P3</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>
température									
200	30	34	29	28	31	31	31	35	32
225	35	41	26	32	36	30	37	40	34
250	37	38	33	40	42	32	41	39	39
275	36	42	36	41	40	40	40	44	45

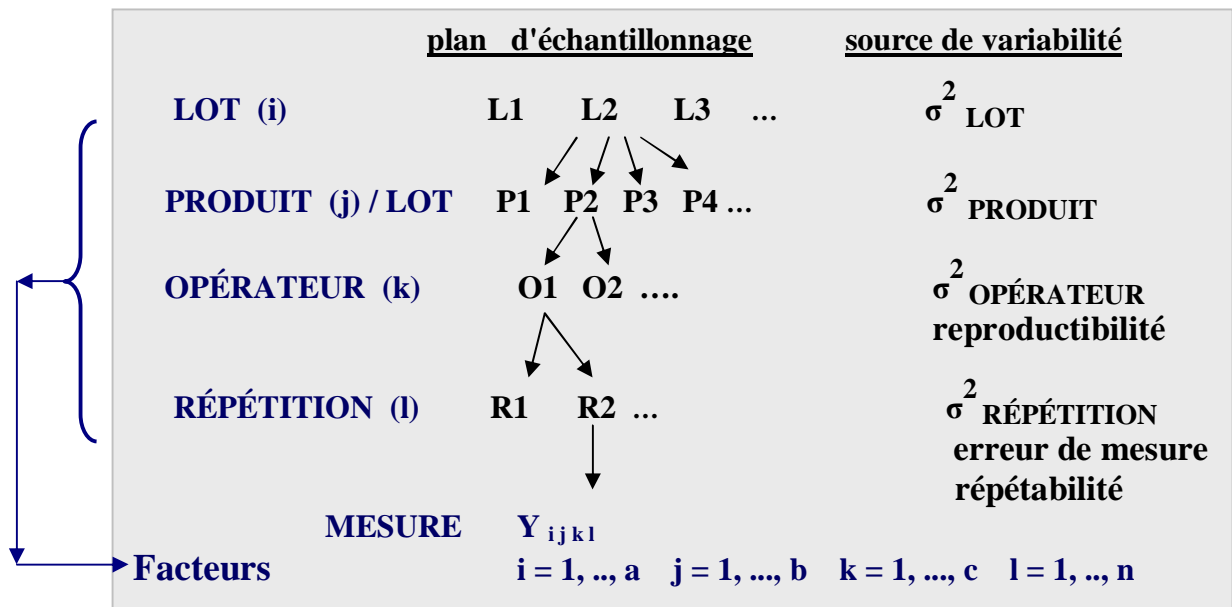
	SS	DF	MS	F	p
Intercept	46728.03	1	46728.03	2462.971	0.0000
method	128.39	2	64.19	3.384	0.1038
Error	113.83	6	18.97		
TEMP	434.08	3	144.69	36.427	0.000
TEMP*method	75.17	6	12.53	3.154	0.0271
Error	71.50	18	3.97		



### 13. Facteurs emboîtés

Lorsque les niveaux d'un facteur B sont spécifiques aux niveaux d'un facteur A, les facteurs sont dits *emboîtés*. Cette structure des traitements est différente du cas de facteurs *croisés* ou toutes les combinaisons des niveaux des facteurs A et B sont présentes. Avec plus de deux facteurs, on peut avoir deux types de structures des traitements : facteurs *complètement emboîtés* ou facteurs *partiellement emboîtés* (partiellement croisés). Les *mesures répétées* constitue un cas de facteurs emboîtés. Il est fréquent que dans un design avec facteurs emboîtés que plusieurs soient des facteurs aléatoires.

**Exemple 26 :** évaluation d'un processus de mesurage  
étude de répétabilité (erreur appareil) et de reproductibilité (opérateur)



Le facteur PRODUIT est emboîté dans le facteur LOT.

Le facteur OPÉRATEUR peut être emboîté ou croisé avec le facteur PRODUIT.

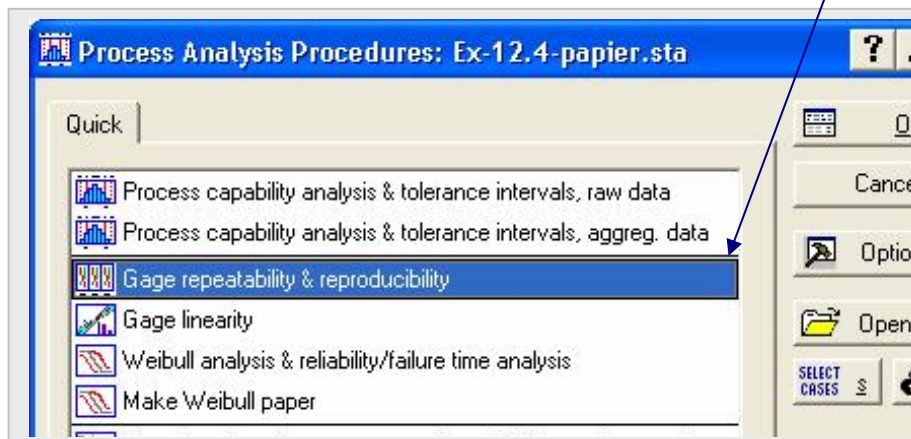
Le facteur RÉPÉTITION est toujours emboîté dans le facteur OPÉRATEUR.

L'objectif principal d'une telle étude est d'estimer les composants de la variance

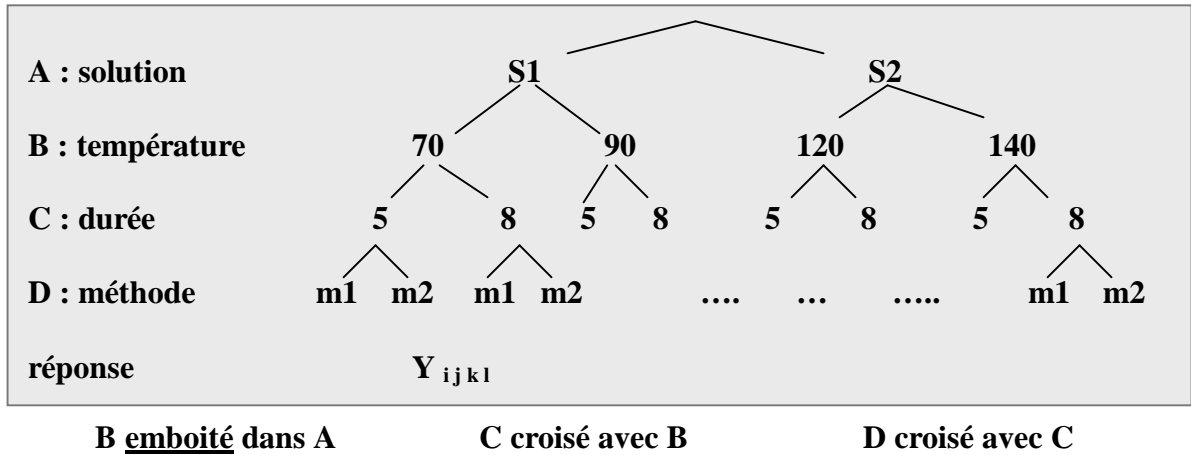
$\sigma^2$  LOT,  $\sigma^2$  PRODUIT,  $\sigma^2$  OPÉRATEUR,  $\sigma^2$  RÉPÉTITION. Tous les facteurs sont aléatoires. Le plan d'échantillonnage souvent employé est

$$a = 1 \quad b = 10 \text{ à } 20 \quad c = 2 \text{ ou } 3 \quad n = 2 \text{ ou } 3$$

La conception et l'analyse de ce type d'étude existe dans STATISTICA.



**Exemple 27 : 4 facteurs partiellement emboîtés**



**Exemple 28 : 3 facteurs complètement emboîtés – Kutner et al 5 ed. p. 1089**

Instructeur	A		B		C		D		E		F	
	groupe		groupe		groupe		groupe		groupe		groupe	
Ville	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
Atlanta	25	29	14	11	X		X		X		X	
Chicago	X		X		11	6	22	18	x		x	
San Francisco	X		X		X		X		17	20	5	2

**Le facteur Instructeur est emboîté dans le facteur Ville.  
 Les groupes (cours) constituent des répétitions.**

Kutner 5ed. p 1089 - instructeur est emboîté dans ville

	Ville	Instructeur	groupe	Y-test
1	Atlanta	A	1	25
2	Atlanta	A	2	29
3	Atlanta	B	1	14
4	Atlanta	B	2	11
5	Chicago	C	1	11
6	Chicago	C	2	6
7	Chicago	D	1	22
8	Chicago	D	2	18
9	San Francisco	E	1	17
10	San Francisco	E	2	20
11	San Francisco	F	1	5
12	San Francisco	F	2	2

**Modèle pour 2 facteurs emboîtés**

facteur A fixe avec a modalités ; facteur B fixe emboité dans A avec b modalités.  
plan équilibré avec n répétitions

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{ijk} \quad (204)$$

$$i = 1, 2, \dots, a \quad j = 1, 2, \dots, b \quad k = 1, 2, \dots, n$$

où  $\mu_{..}$  : effet général  
 $\alpha_i$  : effet du facteur A et  $\sum \alpha_i = 0$   
 $\beta_{j(i)}$  : effet du facteur B et  $\sum_j \beta_{j(i)} = 0$  pour tout i  
 $\varepsilon_{ijk}$  : terme d'erreur distribué  $N(0, \sigma^2)$

**Conséquences**

$$E(Y_{ijk}) = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_{j(i)}$$

$$Var(Y_{ijk}) = \sigma^2$$

Il n'y a pas de terme d'interaction dans le modèle

**Estimation des paramètres**

$$\hat{\mu}_{..} = \bar{Y}_{...} \quad \hat{\alpha}_i = \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...} \quad \hat{\beta}_{j(i)} = \bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} \quad (205)$$

résidus 
$$e_{ijk} = Y_{ijk} - \hat{\mu}_{..} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_{j(i)} = Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.} \quad (206)$$

**Analyse de la variance**

totale 
$$SSTO = \sum \sum \sum (Y_{ijk} - \bar{Y}_{...})^2 \quad (207)$$

facteur A 
$$SSA = bn \sum (Y_{i..} - \bar{Y}_{...})^2 \quad (208)$$

facteur B (emboité A) 
$$SSB(A) = n \sum \sum (Y_{ij.} - \bar{Y}_{i..})^2 \quad (209)$$

erreur 
$$SSE = \sum \sum \sum (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})^2 \quad (210)$$

ANOVA

Source	SS	df	MS	E(MS)
Facteur A	SSA	a - 1	MSA	$\sigma^2 + (bn/(a-1)) \sum \alpha_i^2$
Facteur B(A)	SSB(A)	b - 1	MSB(A)	$\sigma^2 + (n/b(a-1)) \sum \sum \beta_{j(i)}^2$
Erreur	SSE	ab(n-1)	MSE	$\sigma^2$
Totale	SSTO	abn - 1	-----	-----

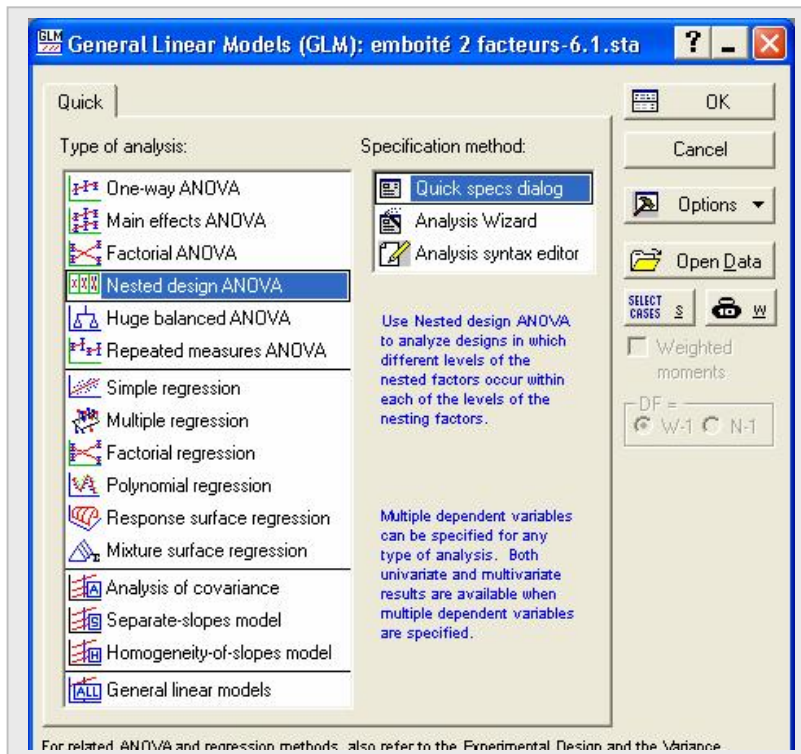
**Tests**

$H_0$  : tous les  $\alpha_i = 0$       FA = MSA / MSE      F(1 -  $\alpha$  ; a - 1 ; ab(n-1))

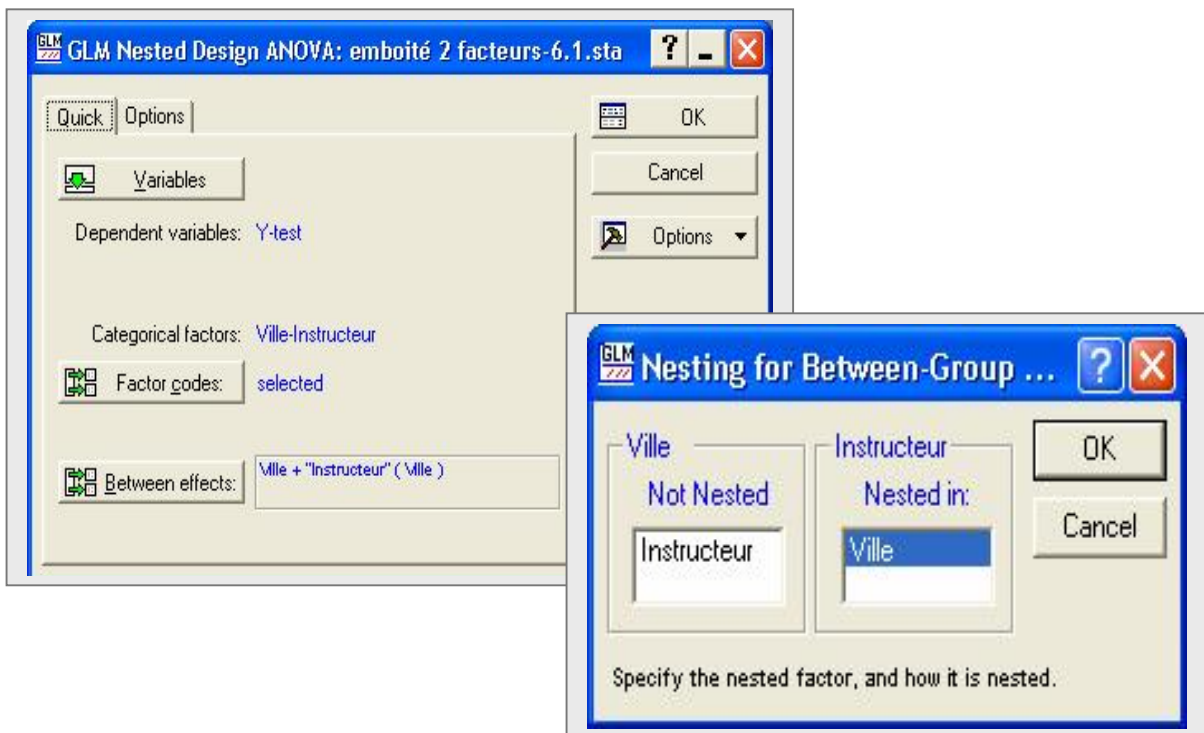
$H_0$  : tous les  $\beta_{j(i)} = 0$       FB = MSB(A) / MSE      F(1 -  $\alpha$  ; b - 1 ; ab(n-1))

On emploie la méthode de Tukey pour identifier les différences de moyennes significatives lorsque les hypothèses sont rejetées.

**Utilisation de Statistica pour les designs avec facteurs emboîtés**

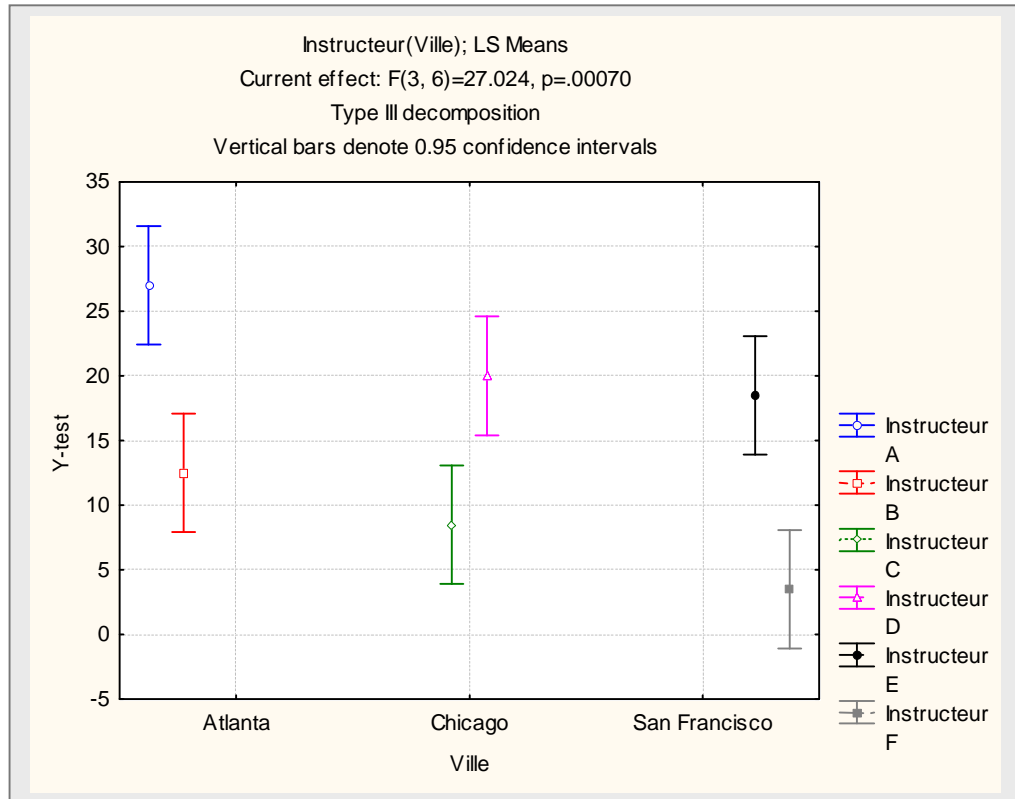


**Exemple 28**





ANOVA					
	DF	SS	MS	F	p-value
Intercept	1	2700.00	2700.00	385.71	0.00000
Ville	2	156.50	78.25	11.18	0.00947
Instructeur(Ville)	3	567.50	189.17	27.02	0.00070
Error	6	42.00	7.00		
Total	11	766.00			

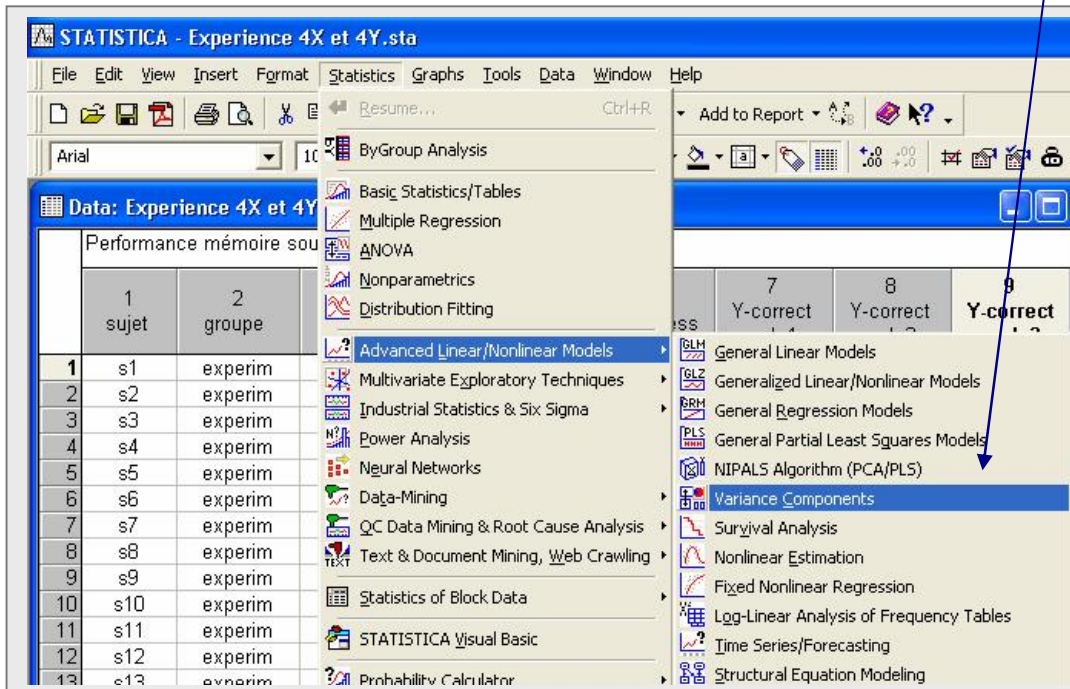


**Tukey HSD test; variable Y-test (emboité 2 facteurs-6.1.sta)**  
 Approximate Probabilities for Post Hoc Tests Error: Between MS = 7.0000, df = 6.0000

	Ville	Instructeur	{1}	{2}	{3}	{4}	{5}	{6}
1	Atlanta	A		0.0116	0.0034	0.2180	0.1156	0.0010
2	Atlanta	B	0.0116		0.6713	0.1765	0.3295	0.0937
3	Chicago	C	0.0034	0.6713		0.0342	0.0620	0.4837
4	Chicago	D	0.2180	0.1765	0.0342		0.9899	0.0061
5	San Francisco	E	0.1156	0.3295	0.0620	0.9899		0.0098
6	San Francisco	F	0.0010	0.0937	0.4837	0.0061	0.0098	

## Compléments

- § Si le plan de données n'est pas équilibré (« balanced »), on analyse les données avec une approche par régression et l'utilisation de variables indicatrices.
- § Si les facteurs A et B sont aléatoires on s'intéresse à l'estimation des composants de la variance. Il existe une procédure de Statistica pour faire cette analyse.



## 14. AUTRES STRUCTURES

## RÉFÉRENCES

### **Applied Linear Statistical Models, 5 ed**

M. Kutner, C. Nachtsheim, J. Neter, W. Li.

McGraw-Hill, 2005, QA 278.2.K87 2005 ISBN 0-07-238688-6

### **Modeling Experimental and Observational Data**

C.E. Lunneborg

Duxbury Press, 1994

### **Design of Experiments: Statistical Principles of Research Design and Analysis, 2 ed**

R. O. Kuehl

Duxbury Press, 2000

### **Analysis of Messy Data, vol 1, vol 2**

G. A. Miliken, D. J. Johnson

Lifetime Learning Publications, Wadsworth, 1984

### **The analysis of Linear Models**

R.R. Hocking

Brooks/Cole, 1985, QA 276 H56 1985, ISBN 053403618X

### **Linear Statistical Models and Related Methods with Applications to Social Research**

John Fox

New York : Wiley, 1984, QA 276 F6435 1984, ISBN 0471099139

### **Generalized Linear Models**

P. McCullagh

London : Chapman and Hall, 1983, QA 276 M38 1983, ISBN 0412238500

### **Linear Models for Unbalanced Data**

S. R. Searle

New York : Wiley, 1987, QA 279 S42 1987, ISBN 0471840963

### **Generalized Linear Models with Applications in Engineering and the Sciences**

R. H. Myers, D. G. Montgomery

New York : Wiley, 2002, QA 276 M94 2002, ISBN 0471355739

### **Multivariate Analysis of Variance and Repeated Measures : A Practical Approach to Behavioural Scientists**

D. J Hand

Chapman and Hall, 1987, QA 278 H345 1987, ISBN 0412258102